Quelques exemples :

(1) $P(z) = z^2 - 2z + 1$

$$= (z-1)^2 \leftarrow \text{factorisation dans } \mathbb{R} \text{ et dans } \mathbb{C}.$$

(2) $P(z) = z^3 - 1$ (racines troisièmes de 1 : $1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}$)

$$= (z-1)(z - e^{2i\pi/3})(z - e^{-2i\pi/3}) \leftarrow \text{factorisation dans } \mathbb{C}.$$

$$= (z-1)\left(z^2 - \underbrace{\left(e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3}\right)}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} z + e^{2i\pi/3} e^{-2i\pi/3}\right)$$

$$= (z-1)(z^2 + z + 1) \leftarrow \text{factorisation dans } \mathbb{R}.$$

(3) $P(z) = z^4 - 1$

$$= (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

$$= (z-1)(z+1)(z^2+1) \leftarrow \text{factorisation dans } \mathbb{R}$$

$$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \leftarrow \text{factorisation dans } \mathbb{C}.$$

fin 03/10

Une fois qu'on a trouvé des racines, on peut effectuer une division de polynômes pour trouver le facteur restant.

Exemple : $p(x) = 2x^3 - 1$ et $q(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 \quad -1 & x + 2 \\ \cline{2-2}
-2x^2(x+2) & 2x^2 - 4x + 8 \\ \cline{1-1}
-4x^2 - 1 & \\
-(-4x)(x+2) & \\ \cline{1-1}
8x - 1 & \\
-8(x+2) & \\ \cline{1-1}
-17 &
\end{array}$$

on obtiendrait 0 si q divise p (pas le cas ici).

On a trouvé : $2x^3 - 1 = (x+2)(2x^2 - 4x + 8) - 17$

Programme d'Analyse 1 par chapitre :

Chapitre 3 : Suites réelles

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Def : Une suite réelle est une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
On écrit $a_n = a(n)$ pour désigner un terme de la suite.
On écrit (a_n) ou $(a_n)_{n \geqslant 0}$ pour désigner la suite elle-même.

Exemple :
- Suite harmonique $(x_n)_{n \geqslant 0}$ donnée par $x_n = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Suite des nombres premiers : x_n est le n-ième nb premier :
  $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_5 = 7$, $x_6 = 11$, ...

Def : Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite. On dit que (x_n) est :

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geqslant x_n$
- strictement croissante ____________, $x_{n+1} > x_n$
- décroissante si ____________, $x_{n+1} \leqslant x_n$
- strictement décroissante si ____________, $x_{n+1} < x_n$
- (strictement) monotone si elle est :
  - soit (strictemt) croissante.
  - soit (strictemt) décroissante.

Def : Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est $\begin{Bmatrix} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{Bmatrix}$ si l'ensemble $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est $\begin{Bmatrix} \text{majoré} \\ \text{minoré} \\ \text{borné} \end{Bmatrix}$.

Proposition : Une suite (x_n) est bornée ssi $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq c$.

Exemple : (x_n) définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $|x_n| = \frac{1}{n+1} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc (x_n) est bornée (prendre $c=1$ dans la proposition).

Point méthode : Pour montrer qu'une suite (u_n) est croissante, on peut essayer de :

- montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Si $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

} soit directement
soit par récurrence

- Si (u_n) est donnée par $u_n = f(n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: étudier les variations de f.

3.2 Limite de suite

Def : Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est la limite de (x_n) ou que (x_n) converge vers l ssi :

$$\forall \underset{\in \mathbb{R}}{\varepsilon > 0}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ et on dit que (x_n) converge / est convergente.

Exemple : Soit (x_n) définie par $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|x_n - 1| \leq \varepsilon$.

On a $|x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Prenons $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$.

Alors $\forall n \geq N$, on a :

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon .$$

$\longrightarrow \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon \iff N^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Ceci monte que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ ∎

Prop : Si une suite converge alors sa limite est unique (admis)

Prop : Tout suite convergente est bonnée.

Preuve : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite.

Prenons $\varepsilon = 1$ (par exemple) dans la définition de la limite.

On a : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| \leq 1$.

Donc $\forall n \geq N$, $|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$

Soit $c = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |\ell|\} \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$ donc la suite est bonnée ∎

3.3 Suites divergentes

Def : Si (x_n) ne converge pas, on dit que (x_n) diverge / est divergente.

c'est-à-dire :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{non}(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad |x_n - \ell| > \varepsilon$$

Cas particuliers : limites infinies.

Def : Soit (x_n) une suite. On dit que :

- (x_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad x_n \geq M$$

on note $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

- (x_n) tend vers $-\infty$ si : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad x_n \leq m$

on note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$.

Ex: $a_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. En effet :

Soit $M \in \mathbb{R}$.

$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ n^2 \geq M$ en prenant $N = \lfloor \sqrt{\max(0,M)} \rfloor + 1$

ou $N = \sqrt{|M|} + 1000$

3.4. Opérations sur les limites

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) si $b \neq 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Preuve pour (i) (les autres : en exercice). On suppose $\alpha, \beta \neq 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha \cdot a_n + \beta b_n - (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} |\alpha \cdot (a_n - a)| + |\beta \cdot (b_n - b)|$$

$$\leq |\alpha| \cdot |a_n - a| + |\beta| \cdot |b_n - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a que :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

se trouvent a posteriori pour aboutir à la bonne conclusion.

Soit $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. On a que, $\forall n \geq N_3$:

$$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci montre $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta b$ (le cas $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ se traite de façon similaire) ■

Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+3/n}{3-1/n}$

1. Factoriser par le plus haut degré.

$= \frac{2 + 3\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}$

2. Appliquer les règles algébriques.

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ car étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ alors on a

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2+3\cdot 0}{3-1\cdot 0} = \frac{2}{3}$.

la limite est non nulle donc (iii) s'applique.

fin 07/10