Pour $\begin{cases} z \in \mathbb{R}_+^*, & \text{on a } \arg(z) = 0 \\ z \in \mathbb{R}_-^*, & \text{on a } \arg(z) = \pi \end{cases}$

fin cours 30/09 $\longleftarrow$

Si $z = a + ib$ avec $a > 0$ on a

$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \left(\text{c'est à dire } \tan\varphi = \frac{b}{a} \text{ et } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Forme polaire de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:
$$z = \underbrace{|z|}_{\text{module de } z} \cdot e^{i\overbrace{\varphi}^{\text{argument de } z}}$$

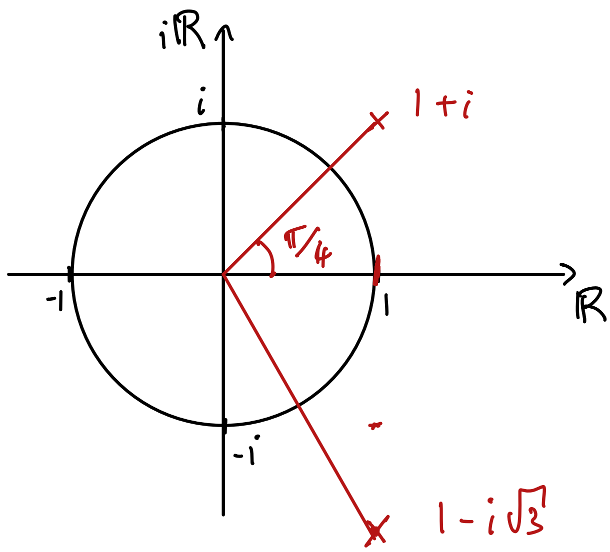
(Produit) Pour $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, on a

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

(Inverse) Pour $z = r e^{i\varphi}$ (avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$) on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2} \cdot r e^{-i\varphi} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

2.5 Exemples (formes cartésiennes et polaires)



1) $i = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1(0 + i \cdot 1)$
$= e^{i\pi/2}$

2/ $-1 = 1 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$
$= e^{i\pi}$

3/ $-i = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

4/ $1 + i$? on a $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Donc $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

5/ $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}$ (en appliquant la formule de l'inverse)

Méthode : soit $z = a + ib$

1) Calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2/ Trouver l'angle φ tel que
$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

Alors $z = |z| e^{i\varphi}$

6) $1-i\sqrt{3}$? On a $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$

Donc $1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2e^{-i\pi/3}$

7) $(1-i\sqrt{3})^{30} = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^{30} = 2^{30}\underbrace{e^{-i\cdot 10\cdot\pi}}_{=1} = 2^{30}$.

2.6 Racines de nombres complexes

Prop : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe n nombres complexes distincts $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}^*$ tels que pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$z_k^n = w$$

* Ces nombres sont appelés les racines n-ièmes de w.
* Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $w = 0$, alors l'unique solution de $z^n = 0$ est 0.

Methode de résolution à l'aide de la forme polaire :

(i) Ecrire w sous forme polaire : $w = |w|\, e^{i(\varphi + k2\pi)}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$

(ii) Passer à l'exposant $\frac{1}{n}$: $z_k = |w|^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$

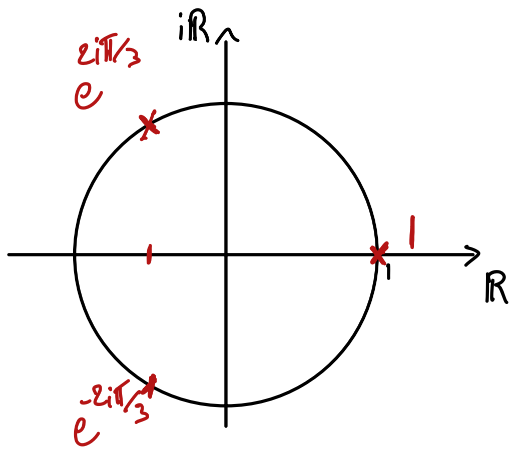
Exemples :

(1) Racines carrées de 1 : $z^2 = 1$ $(n=2)$

(i) $1 = e^{i(0+2k\pi)}$, $k \in \{0,1\}$

(ii) $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{2}} = e^{ik\pi}$, $k \in \{0,1\}$

Les 2 racines de 1 sont 1 et $e^{i\pi} = -1$



(2) Racines troisièmes de 1 : $z^3 = 1$ $(n=3)$

(i) $1 = e^{i(0+2k\pi)}$, $k \in \{0,1,2\}$

(ii) $z_k = 1^{1/3} \cdot e^{\frac{i\cdot 2k\pi}{3}}$, $k \in \{0,1,2\}$

Les 3 racines cubiques de 1 sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$

(2) $z^6 = 1+i$

(i) $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$, $k \in \{0, \dots, 5\}$

(ii) $z_k = 2^{1/12} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0, \dots, 5\}$

2.7 Racines de polynômes complexes

Def: Un polynôme complexe est une fonction $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k \quad (\text{convention } z^0 = 1)$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

- On dit que ce polynôme est de degré n.
- Une racine $z \in \mathbb{C}$ de P est une solution de l'équation $P(z) = 0$

Prop: Si z_0 est une racine de P, alors $P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z)$
où $Q(z)$ est un polynôme de degré $n-1$ (admis)

Théorème fondamental de l'algèbre. Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme complexe de degré n.

Alors P est factorisable en produit de polynômes complexes de degré 1.
C'est-à-dire qu'il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (pas nécessairement distincts) tel que

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

(admis)

En particulier, $P(z_k) = 0$ pour $k = \{1, \dots, n\}$.

Cas particulier explicite : polynômes de degré 2.

Prop: Soit $P(z) = a z^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$
Alors P admet 2 racines dans $\mathbb{C}$ (pas toujours distinctes) :
Pour $k \in \{0, 1\}$, $z_k = \dfrac{-b + w_k}{2a}$ où w_k sont les racines carrées de $b^2 - 4ac$.

<u>Preuve</u> : $P(z) = az^2 + bz + c$ (écrire sous la forme $a(z+y)^2 + y'$, $y, y' \in \mathbb{C}$)

$$= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Donc $P(z) = 0 \iff a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$$\iff \left(2a\left(z + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\iff 2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) = w_k \text{ pour } k \in \{0,1\}$$

$$\iff z = \frac{-b + w_k}{2a}, \quad k \in \{0,1\} \qquad \blacksquare$$

(Ainsi P a 2 racines distinctes ssi $b^2 - 4ac \neq 0$ sinon 1 seule racine égale à $-\frac{b}{2a}$).

<u>Cas des polynômes à coefficients réels</u> : Si $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\bar{z}) \quad \text{car } \overline{a_k z^k} = a_k \cdot (\bar{z})^k \text{ car } a_k \in \mathbb{R}.$$

Donc les racines de P sont soit réelles, soit des paires $(z, \bar{z})$ de complexes conjugués.

Or on a $(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \cdot \bar{z}_k$

$$= z^2 - \underbrace{2\,\mathrm{Re}(z_k)}_{\mathbb{R}} z + \underbrace{|z_k|^2}_{\mathbb{R}}$$

On déduit du théorème fondamental de l'algèbre :

<u>Proposition</u> : Tout polynôme à <u>coefficients réels</u> est factorisable en produit de <u>polynômes réels</u> de <u>degré 1 ou 2</u>.

→ Les facteurs ~~sont~~ soit affines : $(z - z_k)$ avec $z_k \in \mathbb{R}$

- soit quadratiques : $(z^2 + bz + c)$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$ (sinon on factorise dans $\mathbb{R}$)

Quelques exemples :

(1) $P(z) = z^2 - 2z + 1$

$= (z-1)^2$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

(2) $P(z) = z^3 - 1$ (racines troisièmes de 1 : $1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}$)

$= (z-1)(z - e^{2i\pi/3})(z - e^{-2i\pi/3})$ ← factorisation dans $\mathbb{C}$.

$= (z-1)\left(z^2 - (\underbrace{e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}})z + e^{2i\pi/3}e^{-2i\pi/3}\right)$

$= (z-1)(z^2 + z + 1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$.

(3) $P(z) = z^4 - 1$

$= (z^2-1)(z^2+1)$

$= (z-1)(z+1)(z^2+1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$

$= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$ ← factorisation dans $\mathbb{C}$.

fin 03/10