II. Dérivation

Dans ce module d'analyse, notre but est d'étudier plus finement le graphe des fonctions réelles. La semaine dernière, nous avons parlé de continuité. Aujourd'hui, nous allons aborder des outils qui nous permettront d'analyser la croissance et la concavité. Il nous faudra quelques semaines pour y arriver.

1 La dérivée

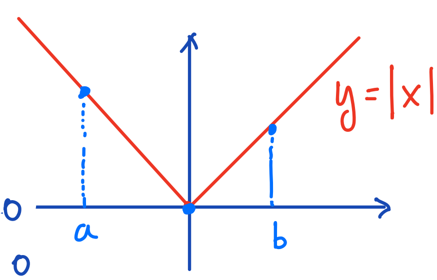
Nous savons que la notion de continuité modélise le fait de pouvoir tracer le graphe d'une fonction sans lever le crayon. Intuitivement, il est clair que certains graphes sont plus agréables à tracer que d'autres. Une fonction affine, sinusoïdale ou quadratique est "aisée" à tracer, alors qu'une ligne polygonale brisée comme le graphe de la valeur absolue se trace avec des "à-coups". On décide de mesurer cela en observant les droites tangentes au graphe de la fonction.

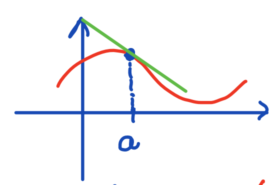
Définition 1.1. version géométrique.
Soit f une fonction réelle définie au voisinage du point a. La *dérivée* de f en a est la pente de la tangente au graphe de la fonction f au point $(a; f(a))$, pour autant que cette tangente existe.

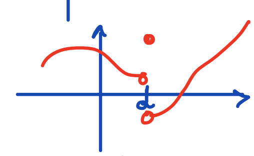
Exemple 1.2. La fonction $x \mapsto |x|$

n'admet pas de dérivée en $x = 0$.

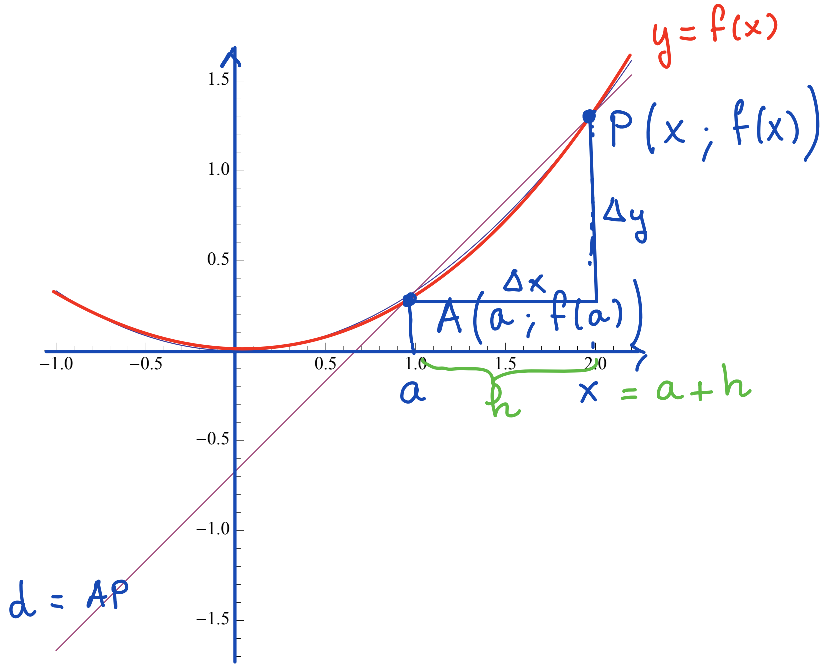
Sa dérivée vaut $\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$







Pour pouvoir travailler avec la notion de dérivée, nous avons besoin d'une définition analytique. On ne va pas tracer la tangente au graphe et mesurer la pente à la règle ! Choisissons donc un point x pas trop éloigné de a et traçons la droite du plan passant par les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$.



La pente de cette droite vaut $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Lorsque P se rapproche de A en coulissant le long du graphe de f, la sécante AP "se rapproche" de la tangente au point A.

Définition 1.3. Soit f une fonction réelle définie (et continue) au voisinage d'un point a. Alors le *nombre dérivé* de f en a, s'il existe, est donné par

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ou encore $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ on a posé $x=a+h$

Exemple 1.4. Soit la fonction $f(x) = 1000$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{1000-1000}{x-a}$$

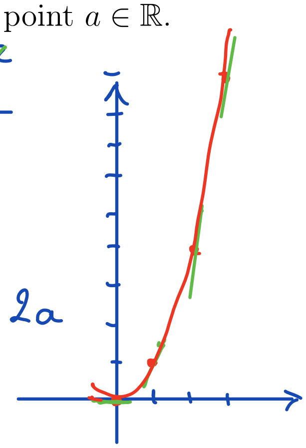
$$= \lim_{x \to a} \frac{0}{x-a} = \lim_{x \to a} 0 = 0 \quad \text{OUF!}$$

Exemple 1.5. Soit la fonction $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2a+h)\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2a$$

ou $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = a + a = 2a$$



$f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$, $f'(2) = 4$

Exemple 1.6. Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.
Rappelons que la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Utilisons la formule trigonométrique de la différence de deux sinus $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$(\sin a)' = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$$

Le produit des limites est égal à la limite du produit, lorsque ces limites existent.
On peut donc écrire

$$\sin'(a) = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

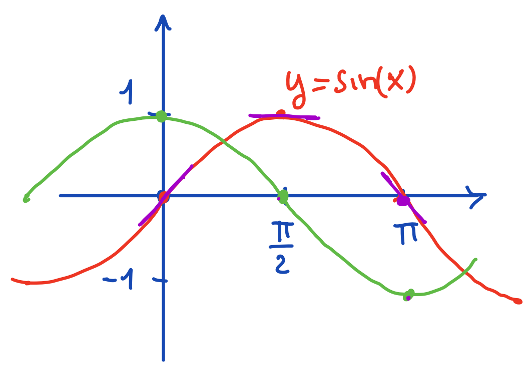
$$\frac{x-a}{2}$$

$t = \frac{x-a}{2}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \cos(a)$$

$$= \underbrace{\qquad}_{1} \cdot \cos(a)$$

$$= \cos(a)$$



Définition 1.7. Soit $D(f') \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble des points où la dérivée de f existe.
La fonction $f' : D(f') \to \mathbb{R}$ qui associe à tout point $x \in D(f')$ son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* ou *dérivée* de f, pour autant que $D(f')$ soit non vide.

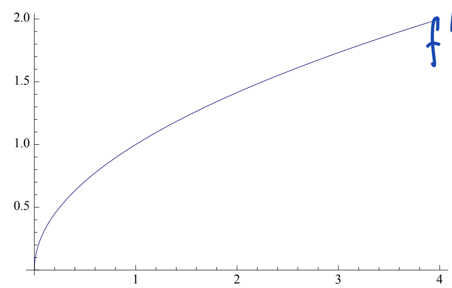
Exemple 1.8. $(c)' = 0$ si $f(x) = c$, $f'(x) = 0$

$(x^2)' = 2x$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ $\qquad (|x|)' = \frac{|x|}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Remarque 1.9. On étend la notion de dérivée de la même façon qu'on a étendu la notion de limite. On peut ainsi parler de dérivée infinie lorsque la tangente au graphe est verticale. On peut aussi parler de dérivée à droite et de dérivée à gauche.

Exemple 1.10. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}\,1}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$. Calculons la dérivée à droite en zéro.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}\sqrt{x}} = +\infty$$

Nous verrons d'autres exemples en exercice.

Pour terminer avec les généralités, nous démontrons que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité. En particulier il n'y a pas de sens à vouloir calculer la dérivée d'une fonction qui n'est pas continue. Géométriquement, il est clair que nous n'arriverons pas à tracer la tangente en un point où la fonction n'est pas continue !

Proposition 1.11. *Une fonction dérivable en un point a est continue en ce point.*

Démonstration.

f dérivable en a $\Rightarrow$ $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Comme le dénominateur tend vers 0, le numérateur doit aussi tendre vers 0 $\Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) = f(a)$ □

Ainsi f est bien continue en a puisque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Comme pour les limites, l'une des méthodes les plus puissantes pour calculer la dérivée de fonctions "compliquées" est de les décomposer en morceaux plus simples. Il faut donc apprendre à calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composition, etc.
Le premier résultat nous dit que la dérivation est une opération linéaire.

Théorème 2.1. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable en a et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Démonstration.

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(a) + \beta g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(a) + \beta g(x) - \beta g(a)}{x-a}$$

linéarité de la limite

$$= \alpha \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \beta \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= \alpha \cdot f'(a) + \beta \cdot g'(a)$$

□

Exemple 2.2. Considérons la fonction $h(x) = \pi x^2 + 1000$. On calcule la dérivée avec la formule précédente et à l'aide des exemples de la section précédente. On obtient

$$h'(x) = (\pi x^2 + 1000)' = \pi (x^2)' + (1000)' = \pi \cdot 2x + 0 = 2\pi x$$

Vous démontrerez le résultat suivant en exercice. Il permet de calculer la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

Théorème 2.3. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a. Alors $f \cdot g$ est aussi dérivable en a et*

⚠ $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(x) = x^2 \sin(x)$. Alors

$f'(x) = (u \cdot v)'(x)$ avec $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x) = x(2\sin(x) + x\cos(x)).$$

Nous passons maintenant au quotient de fonctions dérivables.

Théorème 2.5. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a. Supposons que $g(x) \neq 0$ au voisinage de a. Alors $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Démonstration. Ecrivons la différence des quotients $\dfrac{f}{g}(x) - \dfrac{f}{g}(a)$ en mettant au même dénominateur, puis en enlevant et ajoutant $f(a)g(a)$ au numérateur :

$$\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a) = \frac{g(a)}{g(a)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\cdot\frac{g(x)}{g(x)} = \frac{\big(f(x)\,g(a) - f(a)\cdot g(a)\big) + \big(f(a)\,g(a) - f(a)\,g(x)\big)}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= g(a)\,\frac{f(x)-f(a)}{g(x)\cdot g(a)} + f(a)\,\frac{g(a)-g(x)}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$= \cancel{g(a)}\,\frac{f(x)-f(a)}{g(x)\cdot \cancel{g(a)}} - f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{g(x)\cdot g(a)}$$

$$\text{Ainsi,}\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{\to f'(a)}}{g(x)\cdot(x-a)} \cancel{+} - f(a)\cdot\frac{\overbrace{g(a)-g(x)}^{\to g'(a)}}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)}\right)$$

$$= \frac{1}{g(a)}\cdot f'(a)\cdot\frac{g(a)}{g(a)} - f(a)\cdot\frac{1}{g(a)^2}\cdot g'(a)$$

On voit que cette expression est égale à

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g(a)\cdot g(a)}$$

Exemple : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)' = \dfrac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)\cdot 1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$ □

Nous en avons terminé avec les opérations élémentaires et allons conclure cette partie avec l'inverse d'une fonction dérivable.

Théorème 2.6. *Soit f une fonction réelle bijective sur un intervalle ouvert $]a-u, a+u[$ et dérivable en a. Supposons que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction inverse f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$\Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration. Puisque la fonction f est bijective au voisinage de a, on sait que la fonction inverse de f existe et est définie au voisinage de $b = f(a)$.

Il s'agit donc de calculer la limite de $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$ lorsque y tend vers b.

La bijectivité de f permet à nouveau d'écrire tout y au voisinage de b comme $y = f(x)$ pour un unique nombre réel x compris entre $a-u$ et $a+u$. Ainsi,

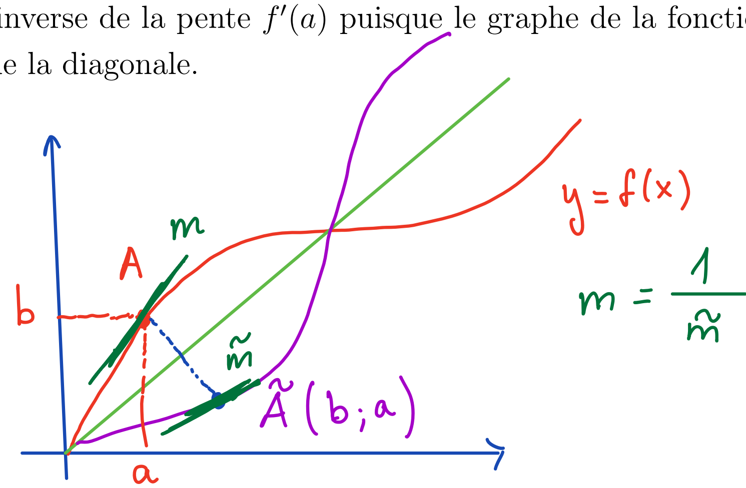
$\Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$\left(f^{-1}(b)\right)' = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

□

Géométriquement, on comprend bien que la pente de la tangente en un point du graphe de la fonction inverse est l'inverse de la pente $f'(a)$ puisque le graphe de la fonction inverse est obtenu par symétrie autour de la diagonale.



Exemple 2.7. Considérons la fonction $f(x) = \sin x$. La fonction inverse est $\arcsin x$ et nous voulons calculer la dérivée en un point b de l'intervalle $]-1, 1[$.

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{\cos(a)} \qquad \text{où} \quad b = \sin(a) \iff a = \arcsin(b)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \iff \cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \cos(a) &= \cos\left(\arcsin(b)\right) \\ &= \overset{+}{\cancel{-}} \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin(b)\right)} \end{aligned}$$

car arcsin(x) est croissante.

$$= \sqrt{1 - b^2}$$

$$\text{Donc} \quad \left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$