Exercice 1.
Pour tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ suivants, déterminer, s'ils existent, l'infimum, le suprémum, le maximum et le minimum. En déduire si A est minoré, majoré ou borné (c'est à dire à la fois minoré et majoré).

a) $A = \{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

b) $A = \{2 + (-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$

c) $A = \{2 + (-2)^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

d) $A = \{2n - n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

e) $A = \{x : 2x - x^2 > 0\}$

f) $A = \left\{x : \dfrac{3-x}{x-x^2} \geq 0\right\}$

Exercice 2.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un **intervalle** borné non vide.
Vrai ou faux ?

a) $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \in A$.

b) Si $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \in A$, alors A est fermé.

c) Si A est fermé, alors $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \in A$.

d) Si $\sup(A) \notin A$ et $\inf(A) \notin A$, alors A est ouvert.

e) Si A est ouvert, alors $\inf(A) \notin A$ et $\sup(A) \notin A$.

Exercice 3.
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $(2-3i)(3+2i)$

b) $\dfrac{1}{i}$

c) $\dfrac{2-3i}{4-5i}$

d) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$

e) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

f) $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

g) $(1+\sqrt{3}i)^8$

h) $\dfrac{1+ie^{\frac{3\pi}{2}i}}{(1+e^{\frac{2\pi}{3}i})^2}$

i) $\dfrac{(3+3i)^3}{(-2+2i)^2}$

Exercice 4.
Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants, et les exprimer sous forme polaire $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

a) -2

b) $2+2i$

c) $-1+i\sqrt{3}$

d) $-1+i\tan(3)$

e) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$

f) i^{2025}

Exercice 5.
Démontrer les formules suivantes pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

b) $|\overline{z}| = |z|$ et $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Exercice 6.

a) A partir de la définition de l'exponentielle complexe, retrouver les **formules d'Euler** :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En déduire les identités trigonométriques suivantes :

b) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

c) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

d) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

e) $2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sin(x) - \sin(y)$

Solutions.

3. a) $12 - 5i$
   b) $-i$
   c) $\frac{23}{41} - i\frac{2}{41}$
   d) $\frac{4}{5} - i\,\frac{6}{5}$
   e) $-2i$
   f) $3 + 2i$
   g) $-128 + 128\sqrt{3}i$
   h) $-1 - \sqrt{3}i$
   i) $-\frac{27}{4} - \frac{27}{4}i$

4. a) $2e^{i\pi}$
   b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   c) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
   d) $\frac{-1}{\cos(3)}e^{-3i}$
   e) $5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   f) $e^{\frac{\pi}{2}i}$