EPFL Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC 7 octobre 2024

# Analyse I – Série 4

**Echauffement 1.** (Formule d'Euler)

Vérifier les égalités suivantes :

$$(i)\ e^{-i\pi/2} = -i \qquad (ii)\ e^{-i\pi} = -1 \qquad (iii)\ \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

**Echauffement 2.** (Forme Polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants.

a) $e^{i+1}$ b) $e^{-(i+1)}$ c) $e^{-(i-1)}$ d) $e^{(i-50)}$ e) $e^{(1-50i)}$

**Exercice 1.** (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $(2-3i)(3+2i)$ b) $\dfrac{2-3i}{4-5i}$ c) $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{4567}$

d) $(1+i\sqrt{3})^{10}$ e) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$ f) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

g) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$ h) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i}$ i) $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

**Exercice 2.** (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a) $2+2i$ b) $-1+i\sqrt{3}$ c) $-1+i\,\mathrm{tg}(3)$ d) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$ e) $2^i$

**Exercice 3.** (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$,

a) $z^5 = 1$ b) $z^2 = -3+4i$ c) $z^4 = -2i$ d) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Représenter les résultats graphiquement.

**Exercice 4.** (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

a) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

**Exercice 5.** (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes $z$ qui satisfont l'équation
$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8 .$$

**Exercice 6.** (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

**Exercice 7.** (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Démontrer l'égalité suivante :
$$\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left(z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0\right) \text{ ou } |z| = 1\right\}.$$

**Exercice 8.** (V/F :Nombres complexes)

Répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.

Q2 : Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n a_0$.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un imaginaire pur (c'est-à-dire sa partie réelle est nulle).

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ est réel.

**Exercice 9.** (QCM : Racines de nombres complexes)

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \frac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

- ☐ $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i)\right\}$
- ☐ $\left\{3i, \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i)\right\}$
- ☐ $\left\{ -3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)\right\}$
- ☐ $\left\{3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)\right\}$