Cours Euler: Corrigé 7

2 octobre 2024

Exercice 1

Remarque. Les croquis ont été vérifiés dans chaque série, ils n'apparaissent pas dans le corrigé.

Partie 1.

a) $F \supset A \cap B$.

b) $F \cap F' \subset A \cup B$.

c) $\{M, N\} \subset F \cap F'$.

d) $a \cap b = \{P\}$ et $P \in F$.

Partie 2.

a) La figure A est contenue dans la réunion des figures B et C.

b) Le point P appartient à l'intersection des figures F et F'.

c) L'intersection des figures C et F est contenue dans la réunion de la figure B et du point A.

d) La réunion de l'intersection des figures A et B et de la figure C est contenue dans la réunion des figures A et B.

Exercice 2

1) Montrons que $(C1)$ est respecté. Il y a trois possibilités de choisir deux points distincts de $\{A, B, C\}$. L'unique droite qui passe par A et B est la droite $\{A, B\}$. L'unique droite qui passe par A et C est la droite $\{A, C\}$ et l'unique droite qui passe par B et C est la droite $\{B, C\}$.

   $(C2)$ est respecté car chacune des trois droites contient exactement deux points, donc en particulier au moins deux points.

   $(C3)$ est respecté car les trois points A, B et C ne sont pas colinéaires comme aucune des droites contient trois points.

2) Montrons que $(C1)$ est vrai. Soient $P, Q \in \{A, B, C, D, E\}$ deux points distincts et $\{R, S\}$ une droite. Alors $\{R, S\}$ passe par P et Q si et seulement si $P \in \{R, S\}$ et $Q \in \{R, S\}$, c'est-à-dire si et seulement si $\{R, S\} = \{P, Q\}$. Donc $\{P, Q\}$ est l'unique droite qui passe par P et Q.

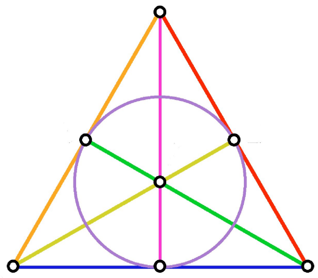
   $(C2)$ est respecté car chacune des droites contient exactement deux points, donc en particulier au moins deux points.

   $(C3)$ est respecté car par exemple les trois points A, B et C ne sont pas colinéaires comme aucune des droites contient trois points.

3) L'axiome $(C1)$ n'est pas vérifié, car il n'y a pas de droite passant par A et C.

4) L'axiome $(C3)$ n'est pas vérifié car les points A, B et C sont colinéaires.

5) **Plan de Fano.** On le représente comme dans le film de la semaine et par symétrie on voit que l'on peut se restreindre aux droites passant par A, un sommet du triangle, pour vérifier $(C1)$. On voit graphiquement que par A et tout autre point il passe exactement une droite. Toute droite contient exactement trois points, $(C2)$ est donc vérifié. Enfin les sommets A, B, C du triangle ne sont pas alignés si bien que $(C3)$ est vrai.

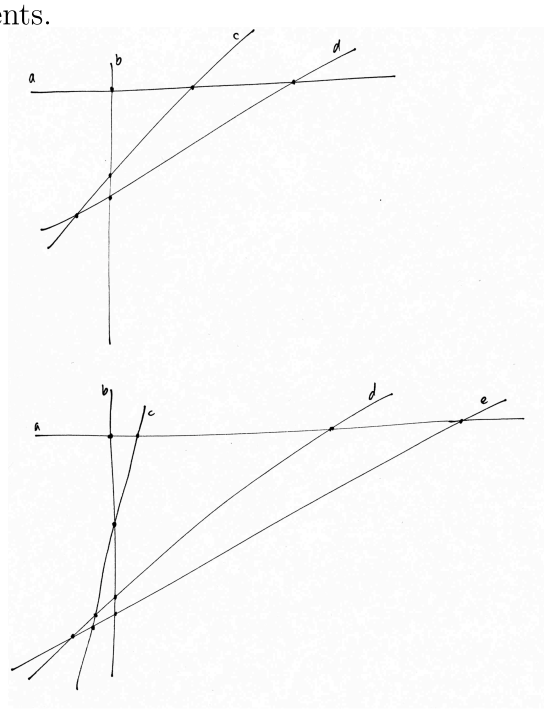


Exercice 3

Les raisonnement ci-dessous ne sont pas des démonstrations, mais des indications.

8. Nommons a, b, c, d les quatre droites. Chaque paire de droite donne au plus un point d'intersection. Il existe une situation où chaque paire de droites se coupe en des points distincts. Dans cette situation, comptons dans l'ordre les points d'intersection sur a, b, c et d. Il y a trois points sur a, puis deux points sur b qui n'appartiennent pas à a, puis un point sur c et d qui n'appartient ni à a, ni à b (voir figure ci-dessous). Cela fait donc $3 + 2 + 1 = 6$ points.

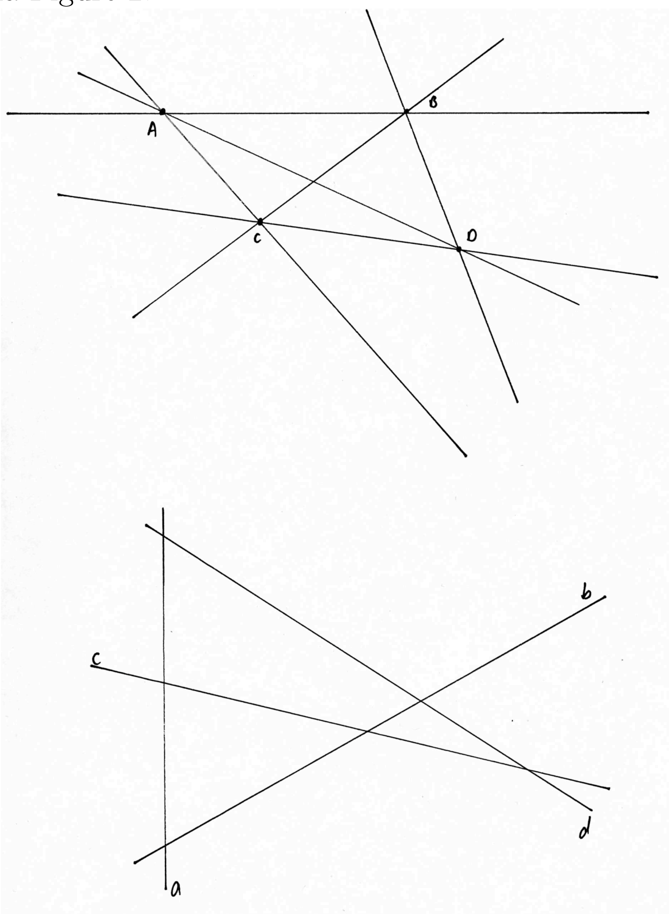
De manière générale, pour n droites on peut avoir au maximum $n - 1 + n - 2 + \ldots + 1 = n \cdot (n-1)/2$ points d'intersection. Il s'agit en fait du nombre de tirages différents de deux objets parmi n sans remise et où l'ordre n'importe pas. Il y a donc $n \cdot (n-1)$ tirages ordonnés et il faut diviser par 2 car on compte deux fois chaque tirage car il y a deux manières d'ordonner un ensemble à deux éléments.



Le cas de quatre et cinq droites

9. Par deux points passe au plus une droite. On peut toujours trouver une configuration où chaque paire de points distincts déterminent une droite différente des autres. Considérons quatre points A, B, C, D. Par A, on peut tirer trois droites différentes, passant respectivement par B, C et D. Par B, hormis la droite AB, on peut tirer deux droites différentes, passant respectivement par C et D. Par C, hormis les droites AC et BC, on peut tirer la droite CD. Toutes les droites par D sont déjà comptée. Cela fait donc $3 + 2 + 1 = 6$ droites. De manière générale, pour n points on peut avoir au maximum $n - 1 + n - 2 + \ldots + 1 = n \cdot (n - 1)/2$ droites distinctes. Même remarque concernant les tirages. Voir premier croquis de la Figure 2.

10. Il faut trois droites pour déterminer un triangle et trois droites déterminent au plus un triangle. Il y a une configuration où chaque triplet de droites détermine un triangle différent. Nommons a, b, c, d ces quatre droites. Il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ triplets formés de ces quatre lettres sans répétition de lettres. De plus, étant données trois lettres, il y a 6 manières différentes de les ordonner. Cela donne donc au final $24 : 6 = 4$ triplet de lettres non ordonnées. Ces quatre droites déterminent donc quatre triangles différents au plus. Pour un nombre n de droite, on fait le même raisonnement et il y a donc au plus $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)/6$ triangles différents. Voir deuxième croquis de la Figure 2.



Questions 9 et 10

11. L'intersection de deux segments peut être soit vide, soit un point, soit un segment dont la longueur est inférieur ou égale à la longueur du plus petit segment.

12. Soient Ra et Sb deux demi-droites. Leur intersection peut être soit vide, soit un point, soit le segment $[RS]$, soit l'une des deux demi-droites.

13. Il s'agit d'un lieu géométrique : l'ensemble des points M du plan tels que $[MP]$ coupe $[AB]$. Ce lieu est déterminé par le segment $[AB]$ et le point P. Nommons-le $Cr_{[AB],P}$ (Cr pour crapoïde).

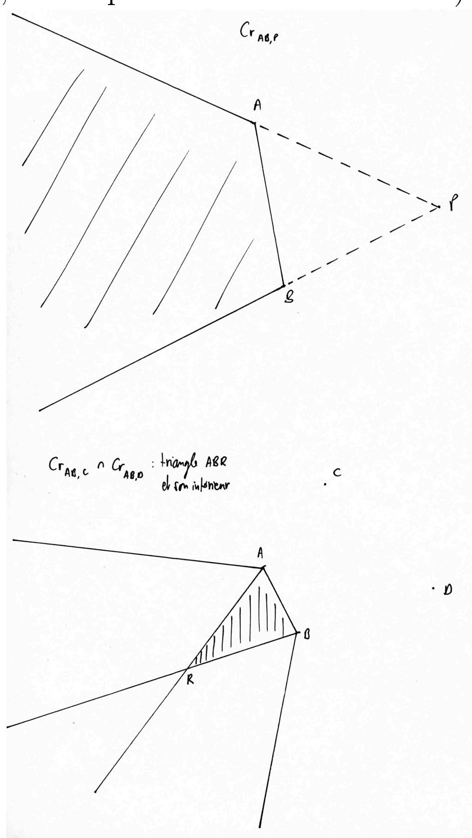
Notons d'abord que si P est sur $[AB]$, alors $[MP]$ coupe toujours $[AB]$ sauf si M est sur la droite AB (l'intersection de $[AB]$ avec $[MP]$ est alors un segment, pas un point). Donc $Cr_{[AB],P}$ est dans ce cas le plan dont on a soustrait la droite AB. Supposons maintenant que P n'est pas sur $[AB]$. Il y a deux cas.

Le premier cas est celui où P est sur la droite AB. Dans ce cas $Cr_{[AB],P}$ est l'extrémité du segment la plus proche du point P. Prouvons-le. Si M est hors de la droite AB, alors la droite MP coupe la droite AB uniquement en P, qui ne se trouve pas dans le segment $[AB]$. Donc le crapoïde voit P. Si M est sur la droite AB alors l'intersection de $[MP]$ avec $[AB]$ est soit vide, soit un segment, soit un point. Elle est un point uniquement lorsque M égale l'extrémité du segment $[AB]$ plus proche de P. Ce point est $Cr_{[AB],P}$.

Finalement, supposons que P est hors de la droite AB. L'ensemble $Cr_{[AB],P}$ est alors l'intersection de trois demi-plans $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. Ici π_1 est le demi-plan ayant pour frontière la droite AB, ne contenant pas le point P. L'ensemble π_2 est le demi-plan ayant pour frontière la droite AP et qui contient le point B. Finalement, π_3 est le demi-plan ayant pour frontière la droite BP et qui contient le point A. Voir premier croquis de la Figure 3.

14. a) Il s'agit de l'intersection des lieux géométriques ($Cr_{[AB],C} \cap Cr_{[AB],D}$). Voir deuxième croquis de la Figure 3.

b) Il s'agit de l'intersection des complémentaires de ces lieux dans le plan (${Cr_{[AB],C}}^c \cap {Cr_{[AB],D}}^c$) (ou, ce qui est équivalent, le complémentaire de la réunion).



Questions 13, 14 et 15

15. Il s'agit de la réunion des lieux ($Cr_{[AB],P} \cup Cr_{[CD],P}$).

Exercice 4

Pour se détendre un peu ? La question est un peu vague car la réponse dépendra de la position des points (par exemple s'ils sont tous alignés). On supposera ici que trois points ne sont jamais alignés. Pour quatre points il faut au moins deux droites, car une seule droite ne sépare le plan qu'en deux demi-plans. Pour séparer les quatre points il faut donc tracer deux droites, de sorte qu'elles forment une croix séparant le plan en quatre "cadrans". Pour cinq points deux droites sont insuffisantes, par contre trois droites permettent de séparer le plan en... sept zones ! Il faudra donc au minimum trois droites pour séparer 5, 6 ou 7 points, mais quatre droites pour séparer 8 points.

Exercice 5

On voit dans cet exercice qu'il est très difficile de décrire de telles figures avec les notions introduites. Par exemple, qu'est-ce que gauche et droite, haut et bas ? Il n'est par exemple pas possible de fixer l'orientation de la figure. Voilà des exemples de description.

a) La figure contient trois points colinéaires A, B, C avec B entre A et C. $\overline{AB}$ est supérieure à $\overline{BC}$. La figure contient également une demi-droite Bd ne contenant pas les points A et C. A partir d'une certaine distance de B, les points de Bd sont plus proches de A que de C.

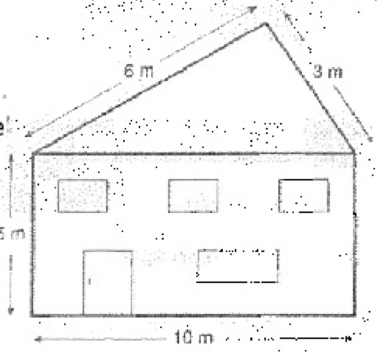
b) La figure contient deux droites concourantes a et b et trois points colinéaires A, B et C n'appartenant à aucun de ces deux droites et alignés avec le point d'intersection O des deux droites. Les points A et B appartiennent au même demi-plan de frontière a, tandis que C est dans l'autre demi-plan. De même, les points A et B appartiennent au même demi-plan de frontière b, tandis que C est dans l'autre demi-plan. Enfin on a $\overline{AB} < \overline{BO} = \overline{OC}$.

c) La figure contient trois droites concourantes. Un point qui appartient à une des trois droites est mis en évidence.

d) La figure contient trois droites concourantes a, b, c et deux points A et B hors de ces droites alignés avec le point d'intersection O des trois droites. $\overline{AO} > \overline{BO}$. De plus, A et B sont de part et d'autre des demi-plans délimités par chaque droite.

Exercice 6

2 Monsieur Dubois veut faire construire sa maison. L'architecte consulté lui propose le plan suivant de la façade :



a) Crois-tu qu'un entrepreneur sera capable de réaliser une telle maison ? non

Pourquoi ? l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée (10>6+3)

b) Si tu réponds non, tente de corriger l'une ou l'autre mesure donnée dans ce plan pour que l'entrepreneur puisse effectuer la construction.

Par exemple, prendre 9m et 5m pour les côtés du toit.

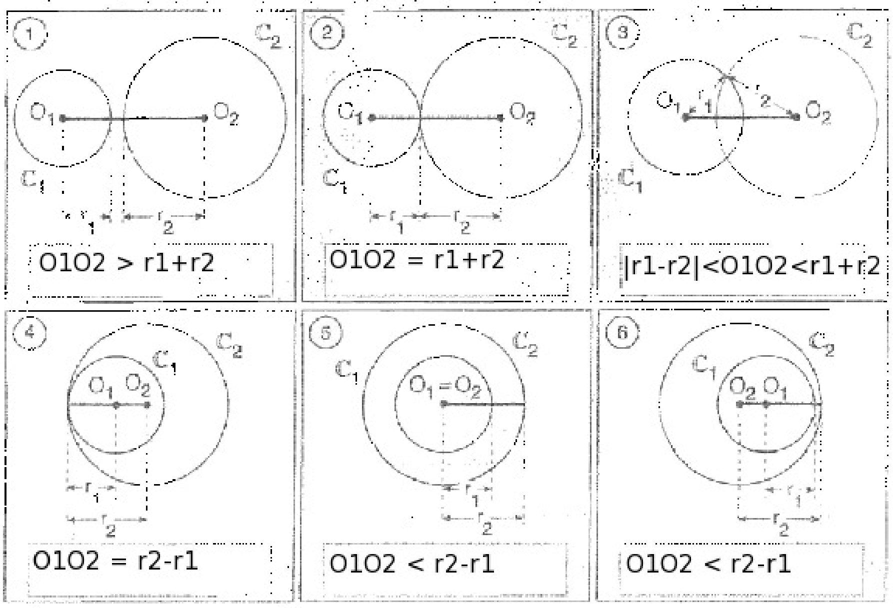
3 Voici six positions de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On te demande, dans chaque cas, de comparer $\overline{O_1O_2}$, **la distance entre leurs centres**,

à la **somme** de leurs rayons respectifs r_1 et r_2 (pour les dessins ① et ②),

à leur **différence** (pour les dessins ④, ⑤ et ⑥),

à leur **somme** et à leur **différence** (pour le dessin ③).



① O1O2 > r1+r2

② O1O2 = r1+r2

③ |r1-r2|<O1O2<r1+r2

④ O1O2 = r2-r1

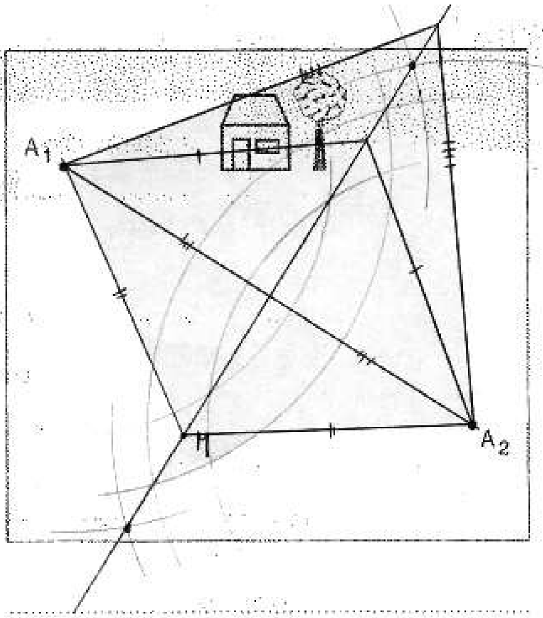
⑤ O1O2 < r2-r1

⑥ O1O2 < r2-r1

Exercice 7

4 Le bourgmestre de ma commune a décidé d'ériger sur la place deux lampadaires A_1 et A_2.

Construis les points qui recevront le **même éclairage** de A_1 et de A_2 en suivant le procédé suivant :



a) Trace le cercle C_1 de centre A_1 et le cercle C_2 de centre A_2, de même rayon, de telle manière qu'ils se coupent.

Note en rouge les points d'intersection de C_1 et C_2.

b) Recommence plusieurs fois cette construction avec des rayons de plus en plus grands.

c) Relie les points rouges obtenus.

- Quelle figure as-tu dessinée ? une droite
- Nomme-la ! la médiatrice du segment[A1A2]
- Compare les distances d'un point M de cette figure à A_1 et à A_2. $\overline{A1M}=\overline{A2M}$
- Crois-tu que cette propriété soit vérifiée pour chaque point de la figure dessinée ? Oui

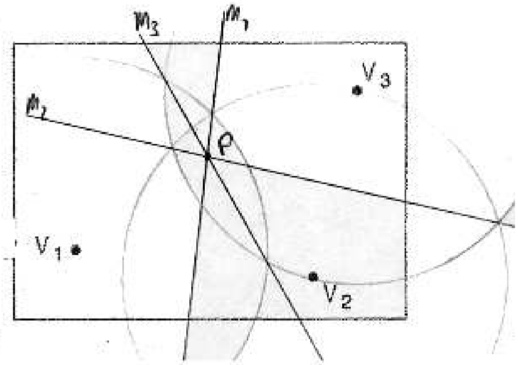
5 a) Trois villas V_1, V_2 et V_3 sont construites dans un lotissement. Les trois propriétaires doivent payer le raccordement à une borne électrique commune. On décide de la placer en un endroit qui doit se trouver à **égale distance** des trois villas.

- Est-ce réalisable ? Oui

Si oui, recherche (à l'aide du compas et de la latte) cet emplacement idéal que tu noteras P.

- Explique ta construction.

voir plus bas



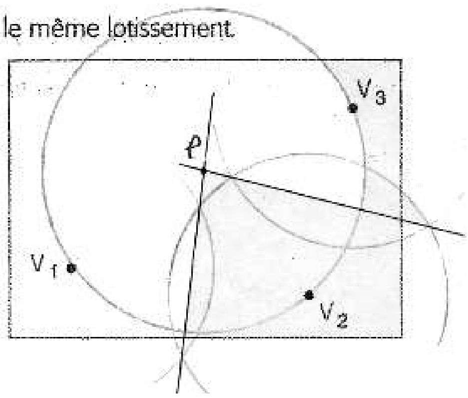
- Pourquoi le point P trouvé répond-il au problème posé ?

voir plus bas

b) Un quatrième propriétaire voudrait construire une villa dans le même lotissement.

En quel endroit, faut-il lui conseiller de la construire pour que, lui aussi, soit à la même distance de la borne que les trois autres ?

Il doit construire sa villa sur le cercle de centre P et de rayon $\overline{PV1}=\overline{PV2}=\overline{PV3}$.



Construis l'ensemble des emplacements où la villa V_4 pourrait être construite. Pourquoi ces emplacements répondent-ils au problème posé ?

Car ce cercle est par définition le lieu géomtrique des points du plan ayant la propriété voulue.

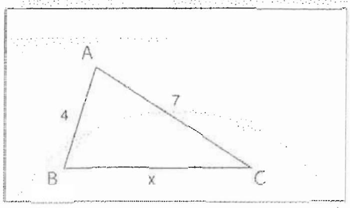
Explication de la construction. *1.* Construire la médiatrice m_1 du segment $[V_1V_2]$. *2.* Construire la médiatrice m_2 du segment $[V_2V_3]$. Les droites m_1 et m_2 se coupent dans un point P. C'est le point recherché.

Pourquoi ? Car $(P \in m_1 \cap m_2) \Leftrightarrow (P \in m_1 \text{et} P \in m_2) \Leftrightarrow (\overline{PV_1} = \overline{PV_2}$ et $\overline{PV_2} = \overline{PV_3})$. Si m_1 et m_2 se coupent en un (forcément unique) point P, ce point P a donc la propriété d'être à égale distance de V_1, V_2 et V_3. (En particulier, P est aussi sur la médiatrice m_3 de $[V_1V_3]$.) On montrera plus tard que m_1 et m_2 sont concourantes.

Exercice 8

Cours Euler Série 8 Première année

209 Observe le triangle suivant :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB}$ < BC+AC	4 < x+7
2.	$\overline{AC}$ < AB+BC	7 < 4+x
3.	$\overline{BC}$ < AB+AC	x < 4+7

Ce sont des inéquations

b) La première de ces inégalités est toujours vraie, quelle que soit la valeur de x.
Pourquoi ? Car 4<7 et x est positif

c) Pour la deuxième inégalité, quelle condition doit remplir x ? (Attention : x peut être un nombre décimal ...)

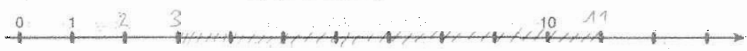
x > 3

d) Quelle condition doit remplir x pour la troisième inégalité ?

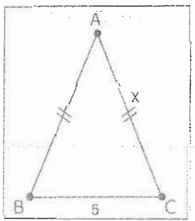
x < 11

e) En résumé, pour ce triangle, la valeur de x est comprise entre 3 et 11
Exprime cela en écriture symbolique : 3 < x < 11

f) Représente ces valeurs (en vert) sur la droite graduée que voici :



210 Observe le triangle isocèle ABC :



a) Complète les inégalités triangulaires et traduis-les en utilisant les données.

1.	$\overline{AB}$ < $\overline{BC}$ + $\overline{AC}$	x < 5+x
2.	$\overline{AC}$ < $\overline{BC}$ + $\overline{AB}$	x < 5+x
3.	$\overline{BC}$ < $\overline{AB}$ + $\overline{AC}$	5 < 2x

5

Exercice 9

1. Inégalité triangulaire

a) Alicia, petite fille de quatre ans, essaie vainement de construire un triangle avec trois bouts de bois dont les longueurs sont 24 cm, 26 cm et 50 cm. Va-t-elle y parvenir ? non

Pourquoi ? car si ABC est un triangle, alors |AC-BC|<AB<AC+BC, or ici 24+26=50. (proposition du cours)

b) Et dans les cas suivants, la construction est-elle réalisable ?

Justifie tes réponses.

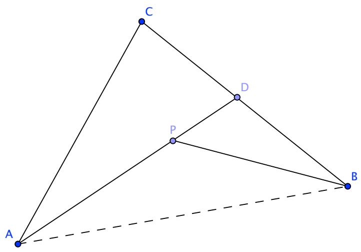
1. 12 cm ; 45 cm ; 25 cm . non, car 45<11+25=37 et proposition
2. 23 cm ; 33 cm ; 43 cm : oui, car |43-23|=10<33<66=43+23 et axiome (vi) de la distance
3. 95 mm ; 8 cm ; 0,7 m : non, car 70>9,5+8=17,5 et proposition
   9,5 cm 70 cm
4. 0,36 m ; 230 mm ; 15 cm : oui, car |23-15|=8<36<23+15=38 et axiome (vi) de la distance
   36 cm 23 cm

Exercice 10

On considère trois points non alignés A, B, C, un point D sur le segment $[BC]$ et un point P sur le segment $[AD]$. Nous devons montrer que $\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}$. Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire deux fois.

Première application : Pour les points B, P et D. On a

$$\overline{BP} < \overline{BD} + \overline{PD}.$$



Deuxième application : Pour les points A, D et C. On a ici

$$\overline{AD} < \overline{AC} + \overline{CD}.$$

Par conséquent, la première inégalité triangulaire ci-dessus permet de comparer :

$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AP} + \overline{PD} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{DB}$$

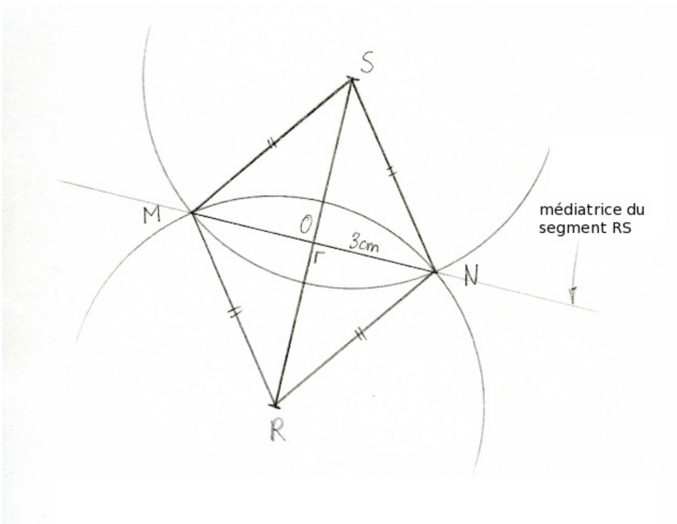
où l'égalité provient de l'axiome $(D4)$. On utilise maintenant la deuxième inégalité triangulaire pour conclure :

$$\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AD} + \overline{DB} < \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

par $(D4)$ encore une fois. Le résultat est démontré.

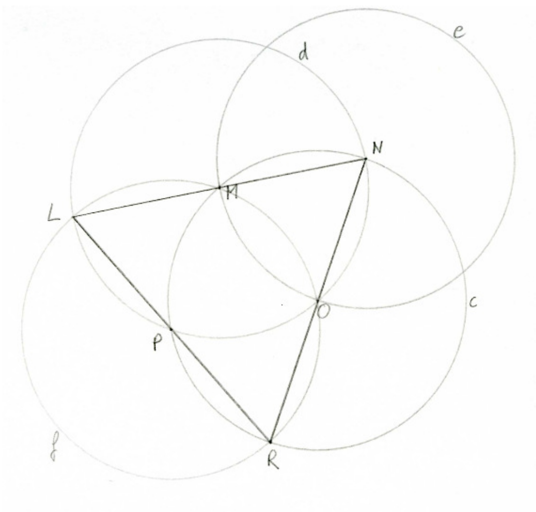
Exercice 11

a)



Le quadrilatère $MRNS$ est un losange de petite base 6 cm et de grande base 8 cm. $\overline{RN} = \overline{SN} = \overline{MS} = \overline{MR} =$ rayon $= 5$ cm. On peut donner quelques propriétés du losange : ses côtés sont isométriques, ses côtés opposés sont deux-à-deux parallèles, ses angles sont isométriques, ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.

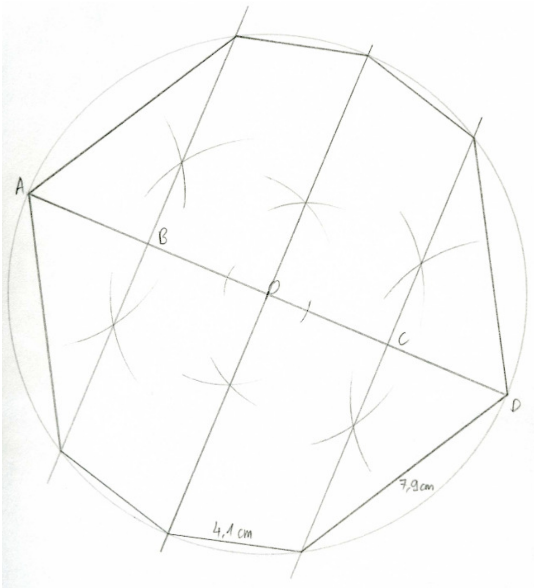
b)



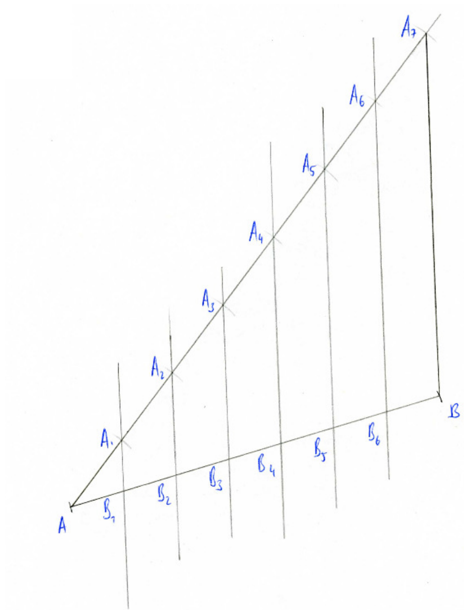
O appartient à d car M est le centre de d et M appartient à c. Autrement dit, par la définition du cercle, un point appartient à d si et seulement si la distance entre ce point et M est 4 cm. Et comme M appartient au cercle c, la distance entre M et O est 4 cm. Donc le point O appartient bien à d.

Le triangle LNR est équilatéral de côté 8 cm donné par le diamètre de c.

c) Octogone (polygone à 8 cotés) irrégulier.



Exercice 12



Pour partager un segment $[PQ]$ de 9,5 cm en 11 parties, appliquer la même méthode en reportant 11 segments $[AA_1], [A_2A_3], \ldots, [A_{10}A_{11}]$.