Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques 25 septembre 2024

Exercice 1. *(1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 10 points) Burier juin 2006*

Claude joue aux cartes avec trois amis. Le jeu comporte 36 cartes, soit 4 couleurs et 9 cartes différentes par couleur. Claude reçoit 9 cartes, ce qu'on appelle une main

a) Combien de mains différentes possibles peut-il recevoir ?

$C_9^{36} = |S| = \dfrac{36!}{(36-9)!9!} = 94'143'280$ mains.

b) Combien de mains différentes possibles contenant les 4 as peut-il recevoir ?

$C_4^4 \cdot C_5^{32} = 1 \cdot \dfrac{32!}{(32-5)!5!} = 201'376$ mains.

c) Combien de mains différentes possibles contenant au moins un pique peut-il recevoir ?

$C_9^{36} - C_9^{36-9} = C_9^{36} - C_9^{27} = C_9^{36} - \dfrac{27!}{(27-9)!9!} = 94'143'280 - 4'686'825 = 89'456'455$ mains.

d) Quelle est la probabilité qu'il reçoive exactement deux as ?

Il y a $C_2^4 \cdot C_7^{36-4} = C_2^4 \cdot C_7^{32} = 6 \cdot 3'365'856 = 20'195'136$ mains avec exactement deux as.

Ainsi, $P\{\text{"exactement deux as"}\} = \dfrac{C_2^4 \cdot C_7^{32}}{|S|} = \dfrac{20'195'136}{94'143'280} \cong 0.2145 = 21,45\%$

e) Sachant que sa main contient exactement 5 trèfles, quelle est la probabilité qu'il possède l'as de cœur ?

Nb de mains contenant exactement 5 trèfles : $C_5^9 \cdot C_4^{27} = 126 \cdot 17'550 = 2'211'300$

Nb de mains contenant exactement 5 trèfles et l'as de cœur :

$C_5^9 \cdot C_1^1 \cdot C_3^{26} = 126 \cdot 1 \cdot 2'600 = 327'600$

$P\{\text{"as de cœur | exactement 5 trèfles"}\} = \dfrac{126 \cdot 2'600}{126 \cdot 17'550} = \dfrac{2'600}{17'550} = \dfrac{4}{27} = 0,\overline{148} \cong 14,81\%$

Exercice 2. *(1 + 2 + 3 = 6 points)*

Le minibus de M. Greyhound peut transporter 12 personnes en plus du chauffeur. Les sièges sont disposés en trois rangées de quatre places avec un couloir passant au milieu. Six femmes et six hommes montent dans le minibus.
De combien de façons différentes M. Greyhound peut-il disposer les personnes si :

a) il n'y a pas de contraintes ?

$P_{12} = 12! = 479'001'600$

b) toutes les femmes sont d'un côté du couloir et tous les hommes de l'autre ?

$P_6 \cdot P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 6! \cdot 2! = 1'036'800$

c) sur chaque rangée, il y a un homme et une femme sur les sièges situés à côté du couloir ?

$6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 2^3 \cdot 6! = 82'944'000$

Exercice 3. *(2 + 3 = 5 points)*

Huit schtroumpfs, qui se ressemblent comme des schtroumpfs d'eau, prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée. Arrivé au 6ème étage, l'ascenseur est vide.

a) De combien de façons différentes les huit schtroumpfs ont-ils pu se répartir sur les cinq étages desservis par l'ascenseur ?

Chacun des 8 schtroumpfs peut sortir sur chacun des 5 étages : $C_{5-1}^{5+8-1} = \frac{12!}{4!8!} = 495$

b) Qu'en est-il si le grand schtroumpf et deux schtroumpfettes, de vraies jumelles bien entendu, se trouvent au départ dans le groupe de huit ?

Le grand stroumpf peut sortir sur l'un des 5 étages, chaque stroumpfette peut sortir sur chacun des 5 étages et de même pour chacun des 5 schtroumpfs :
$C_1^5 \cdot C_{5-1}^{5+2-1} \cdot C_{5-1}^{5+5-1} = 5 \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{9!}{4!5!} = 5 \cdot 15 \cdot 126 = 9450$

Exercice 4. *(4 points)*

Un voyage est organisé pour 22 personnes au maximum. On sait que la probabilité qu'une personne inscrite se désiste la semaine précédent le départ est de 2%. Deux personnes désirant partir ensemble n'ont pas pu s'inscrire la semaine précédent le départ car le groupe était complet. Elles ont été placées en tête d'une liste d'attente.
Quelle probabilité ont-elles de pouvoir tout de même partir ensemble suite à des désistements ?

$$\begin{aligned} P\{\text{au moins 2 désistements}\} &= 1 - P\{\text{ 0 désistement}\} - P\{\text{1 désistement}\} \\ &= 1 - 0.98^{22} - C_1^{22}\, 0.98^{21} \cdot 0.02 = 1 - 0.6412 - 0.2879 = 7.10\% \end{aligned}$$

Exercice 5. *(5 points)*

Soit X une variable aléatoire. Donner la définition de la variance de X puis démontrer que

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

Si $E[X] = \mu, \quad Var(X) = E[(X-\mu)^2]$.

On développe le carré : $(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$.

Par linéarité de l'espérance, on il vient

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - 2\mu E[X] + E[\mu^2] = E[X^2] - \mu^2$$

puisque l'espérance de la variable aléatoire constante μ^2 vaut μ^2.

Exercice 6. *(5 + 2 + 5 = 12 points)*

On lance deux dés équilibrés et on considère les variables aléatoires
X = nombre de diviseurs de 2 obtenus et Y = nombre de diviseurs de 6 obtenus.

a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y et calculer les espérances de X et Y.

X et Y peuvent prendre des valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

X s'incrémente de 1 si on tire 1 ou 2. Y s'incrémente de 1 si on tire 1, 2, 3, ou 6.

$P\{X = 0\} = \frac{4}{9}$, $P\{X = 1\} = \frac{4}{9}$, $P\{X = 2\} = \frac{1}{9}$. Ainsi $E[X] = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

$P\{Y = 0\} = \frac{1}{9}$, $P\{Y = 1\} = \frac{4}{9}$, $P\{Y = 2\} = \frac{4}{9}$. Ainsi $E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple,

$P\{X = 0\} = \frac{4}{9} \neq P\{X = 0 | Y = 0\} = 0$ car les diviseurs de 2 sont des diviseurs de 6.

c) Calculer la covariance de X et Y.
Il faut calculer $E[X \cdot Y]$ pour utiliser la formule $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$.

$XY = 0$ si on ne tire jamais 1 ou 2, soit dans 16 cas sur 36 et $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.
$XY = 1$ si on tire 14, 15, 24, 25 ou 41, 51, 42, 52, soit dans 8 cas sur 36 et $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
$XY = 2$ si on tire 13, 16, 23, 26 ou 31, 61, 32, 62, soit dans 8 cas sur 36.
$XY = 4$ si on tire uniquement 1 ou 2, soit dans 4 cas sur 36 et $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Ainsi, $E[XY] = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$ d'où

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\, E[Y] = \frac{10}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$.

Exercice 7. *(5 points)*

On tire au hasard un mot dans la phrase "TU PEUX GAGNER". Le joueur dois prédire en combien de lettres s'écrit le mot tiré et devra payer le carré de la différence entre la longueur prédite et la vraie longueur.
Quelle longueur faut-il prédire pour payer le moins possible en moyenne ?

Soit X la variable aléatoire donnant la longueur du mot tiré et t la valeur prédite.
L'espérance du prix à payer vaut alors

$$E_t[(X - t)^2] = \frac{1}{3} \cdot (t - 2)^2 + \frac{1}{3} \cdot (t - 4)^2 + \frac{1}{3} \cdot (t - 6)^2 = t^2 - 8t + \frac{56}{3} = (t - 4)^2 + \frac{10}{3}$$

$E_t[X]$ atteint son minimum en $t = 4$.
Il faut donc choisir 4 pour espérer payer seulement $\frac{8}{3} = 2,\bar{6}$ francs en moyenne.

Attention : dans ce cas particulier, il se trouve que par hasard $E[X] = 4$. Mais ceci ne justifie pas que 4 est la valeur à prédire pour minimiser le coût du jeu.

Exercice 8. *(1 + 4 + 3 + 2 + 4 + 2 = 16 points)*

Un chauffagiste a relevé pour des périodes de 24 heures la consommation moyenne de mazout d'un immeuble en fonction de la température extérieure la plus froide de la journée.

Température ($C°$)	-13	-8	-4	2	8	15
Quantité de mazout (l.)	5,2	4,4	3,7	2,8	1,8	0,7

a) Déterminer la variable indépendante X et la variable dépendante Y.
X est la température, Y la quantité de mazout consommée.

b) Calculer l'espérance et l'écart-type de la quantité de mazout consommée.
Noter le détail des calculs.
Déterminer et interpréter l'intervalle construit en statistique à partir ces deux valeurs.

$E[Y] = 3,10$ litres,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= E[(Y - E[Y])^2] = E[Y^2] - E]Y]^2 \\ & \frac{5,2^2 + 4,4^2 + \cdots + 0,7^2}{6} - 3,1^2 = 11,94 - 9.61 = 2,33\end{aligned}$$

$\sigma = \sqrt{2,33} = 1,53$ litres. $3,10 - 1,53 = 1,57$ et $3,10 + 1,53 = 4,63$

La plupart des jours la consommation de mazout est comprise entre 1,57 et 4,63 litres.

c) Sachant que la moyenne des températures vaut 0 degrés et l'écart-type 9,50 degrés, calculer le coefficient de corrélation en notant le détail des calculs.
Interpréter ce coefficient de corrélation dans le contexte.

$E[XY] = \frac{1}{6}\sum xy = \frac{-13 \cdot 5,2 - 8 \cdot 4,4 + \cdots + 15 \cdot 0,7}{6} = -\frac{87,1}{6} = -14,52$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] = -14,52 - 0 \cdot 3,1 = -14,52$

$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-14,52}{1,53 \cdot 9,50} = -0.9999.$

La corrélation entre la consommation de mazout et la température extérieure est très forte.
$r < 0$ indique que la consommation de mazout diminue lorsque la température augmente.

d) Calculer le coefficient de détermination en donnant la formule de calculs.
Interpréter ce coefficient de détermination dans le contexte.
$r^2 = (-0.9999)^2 = 0.99979$. la température explique 99,97% de la variation de la consommation. 0.03% dépend d'autres facteurs comme... l'imprécision des mesures ?

e) Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de ce nuage de points en donnant les formules des calculs.
Que représente les paramètres a et b dans le contexte ?

$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} = \frac{-14,52}{90,33} = -0,16$, donc 0,16 litre consommé en plus par degré en moins.

$b = \mu_y - a\mu_x = 3,10 - (-0,16) \cdot 0 = 3,10$ litres consommés lorsqu'il fait 0°

Le modèle est $y = -0,16\,x + 3,10$.

f) Estimer la consommation de mazout pour une température de 20° avec ce modèle.
Expliquer le résultat

$y = -0,16\,20 + 3,10 = -0,1$ litres, soit une consommation négative.
Un modèle de regression peut donner des résultats aberrant des valeurs qui sortent de l'intervalle contenant les données mesurées.