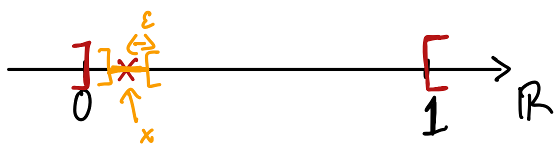
Intervalles de $\mathbb{R}$: ensemble des réels compris entre deux bornes. Soient $a < b$:

- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leqslant a\}$
- $]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > b\}$

Remarque : $]a, a[= \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$.

Definition : • $A \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert si
$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$
• $A \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exemple : $A =]0, 1[$ est ouvert



Preuve : soit $x \in A$.

• si $x \leqslant \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset]0, 1[$

• si $x > \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{3x-1}{2}, \frac{x+1}{2}[\subset]0, 1[$

Autres exemples : . ouverts : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]\frac{-3}{\sqrt{2}}, 0[\cup]0, 10[$, $\mathbb{R}^*$
. fermés : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{3\} \cup [0, 2]$.
aussi : $\mathbb{Z}$

fin 26/09

(Infos : séances du soir sur le moodle)

Remarque : $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés à la fois.

Question : $A = \{\frac{1}{k\pi} \,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$ ouvert ou fermé ?

• $\frac{1}{\pi} \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $]\frac{1}{\pi} - \varepsilon, \frac{1}{\pi} + \varepsilon[\not\subset A$
donc A n'est pas ouvert.

- $0 \in \mathbb{R} \setminus A$ mais $\forall \varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset \mathbb{R} \setminus A$

  car $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k\pi} < \varepsilon$ et donc $\frac{1}{k\pi} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

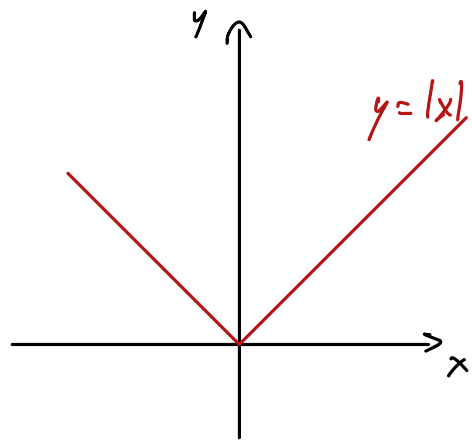
  donc $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas ouvert donc A n'est pas fermé.

- Ainsi A est ni ouvert ni fermé.

1.3 Valeur absolue

Def : la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est définie par :

$$|\cdot| : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



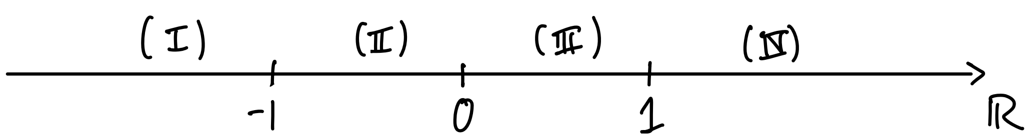
Par exemple : $|-3| = -(-3) = 3$.

Quelques propriétés : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x = 0 \iff |x| = 0 \\ |-x| = |x| \\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \\ |x| = \sqrt{x^2} \\ \text{Inégalité triangulaire : } |x+y| \leq |x| + |y| \\ \text{Inégalité triangulaire inverse : } |x-y| \geq \big| |x| - |y| \big| \end{cases}$$

Résolution d'inéquations (à maîtriser) :

Décrire $A = \left\{ x \in \mathbb{R} ;\ |x| \neq 1 \text{ et } \frac{1}{1-|x|} < 1 \right\}$ à l'aide d'intervalles.



(I) Si $x < -1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} < 0$ donc $x \in A$

(II) Si $-1 < x \leq 0$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1+x} \geq 1$ donc $x \notin A$

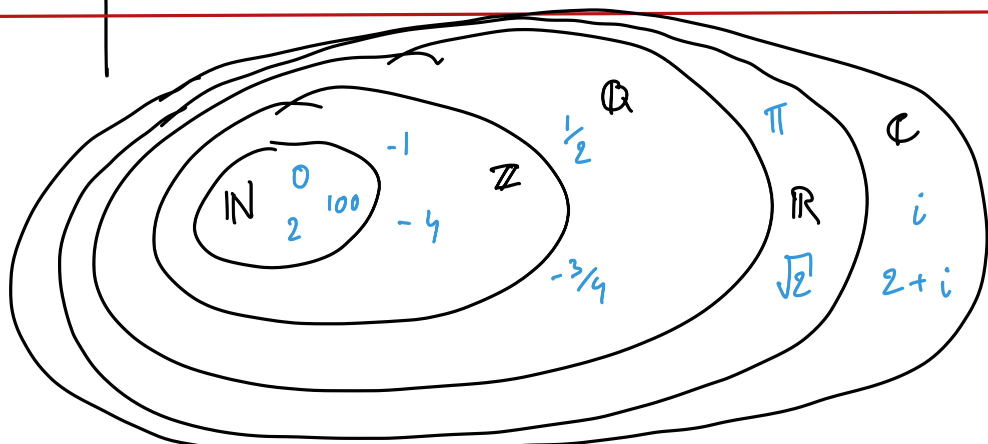
(III) Si $0 \leq x < 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} \geq 1$ donc $x \notin A$

(IV) Si $x > 1$ alors $\frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-x} < 0$ donc $x \in A$

En conclusion $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$= \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Chapitre 2 : Nombres Complexes



Pb: $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.

On peut définir $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ suivantes :

$$+ : ((a,b),(c,d)) \longmapsto (a+c,\ b+d)$$
$$\cdot : ((a,b),(c,d)) \longmapsto (ac-bd,\ ad+bc)$$

Représentation cartésienne

- On a $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$
  $(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b,\ 0)$

Ceci nous permet d'identifier $(x,0)\in\mathbb{C}$ avec $x\in\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

- Notation $i=(0,1)$ appelé "unité imaginaire".

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

Pour tout $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, on peut écrire $z = a\cdot 1 + b\cdot i = a+ib$

c'est ce qu'on appelle la représentation cartésienne de z.

On retrouve les règles de calcul définies plus haut :

Pour $z_1 = a+i\cdot b$ et $z_2 = c+id$, on a (avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$) :

- $z_1+z_2 = (a+c)+i\cdot(b+d)$
- $z_1\cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) = (a\cdot c-bd)+i(bc+ad)$.

2.1 Définitions additionnelles

- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
- le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$

Propriétés : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} \end{cases}$

- Partie réelle : $\begin{cases} \mathcal{R}e(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \in \mathbb{R} \\ \mathcal{I}m(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Module : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

On a $\left.\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ |\bar{z}| = |z| \\ |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \end{cases}\right\}$ à vérifier.

- Inverse d'un nombre complexe : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

On a : $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \iff z \cdot \left(\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1$.

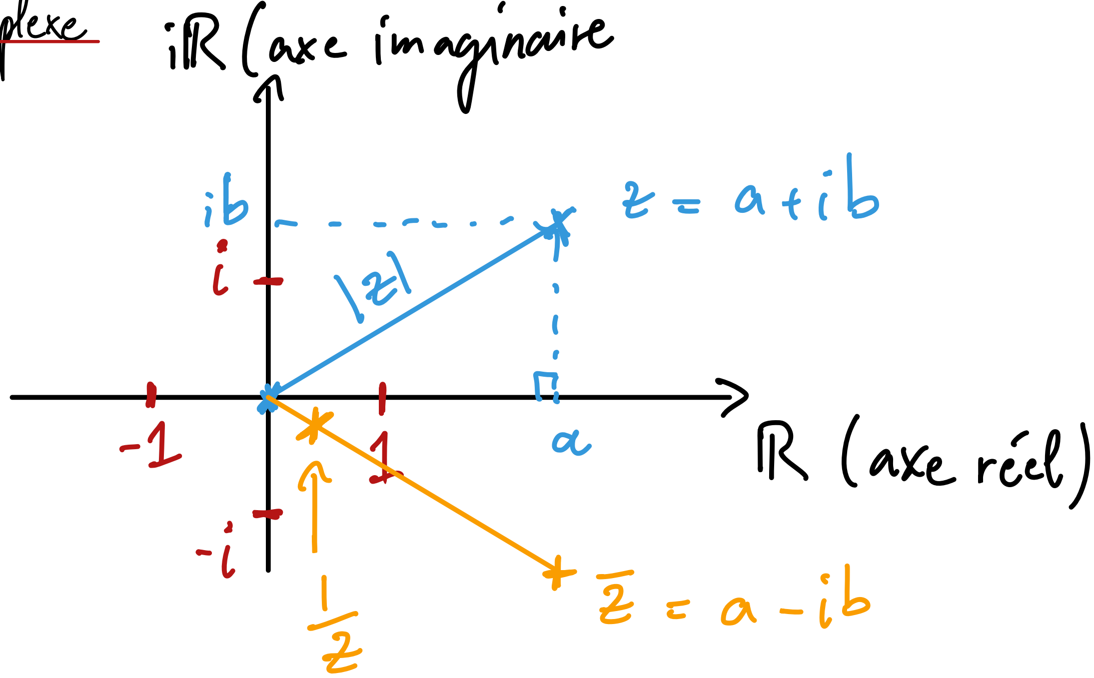
notation équivalente

Donc $\dfrac{1}{z} \boxed{\equiv} z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Remarque : $|z^{-1}| = \left|\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \dfrac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \dfrac{1}{|z|}$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \underbrace{\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i \underbrace{\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

2.2 Plan complexe



2.3 Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe, pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ par :

$$\boxed{e^z := e^a(\cos(b) + i\sin(b))}$$

En particulier, pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

<u>Formule d'Euler</u> : $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

Remarque : $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = 1$

Propriétés :
- $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ (vérifier)
- Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (admis)
- On en déduit que $(e^z)^n = e^{n \cdot z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$

<u>Formule de Moivre</u> (on prend $z = i\varphi$) :

$$\boxed{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

Par exemple, pour $n=2$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^2$$
$$= \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 + i\cdot 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

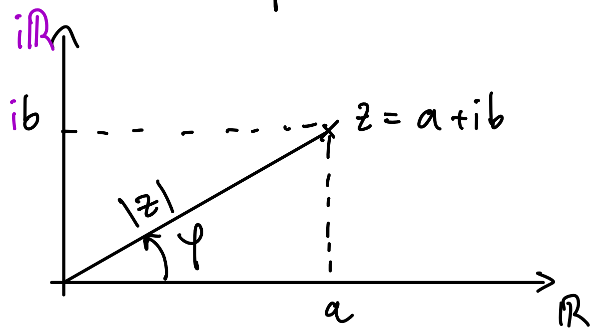
On en déduit par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \\ \sin(2\varphi) = 2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) \end{cases}$$

Remarque (conséquence de la formule d'Euler) : pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin(\varphi) = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

2.4 Forme polaire d'un nombre complexe



Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) :

$$z = \frac{z}{|z|}\cdot|z| = |z|\cdot\alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{z}{|z|} \text{ qui est de module } 1$$

(en effet $|\alpha| = \frac{|z|}{|z|} = 1$).

Comme $|\alpha| = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ t.q $\alpha = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

il est déterminé à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Def : le nombre } \varphi \in]-\pi,\pi] \text{ est appelé l'argument de } z, \text{ noté } \varphi = \arg(z).}$