Chapitre 1 : Nombres Réels

Objectif : représenter toutes les grandeurs mesurables, droite numérique sans trous.

(Aparté) Construction de $\mathbb{R}$:

Soit V l'ensemble des écritures décimales infinies après la virgule :

$r \in V$ s'écrit $r = a, a_1 a_2 a_3 \ldots$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\} \end{cases}$

On définit $\sim$ par $0,9999\ldots \sim 1,000\ldots$

$0,25999\ldots \sim 0,26000\ldots$

Pourquoi ? $10 \times \underbrace{0,999\ldots}_{x} = 9,999\ldots = 9 + \underbrace{0,999\ldots}_{x}$

$10x = 9 + x \Rightarrow x = 1.$

On peut définir $\mathbb{R}$ comme $V/\sim$

Structure de $\mathbb{R}$:
- deux opérations : $+$ et $\times$
- relation d'ordre : $\leqslant$

Rmq :
- * le choix de la base 10 est arbitraire
- * $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ comprend exactement les écritures décimales qui sont périodiques à partir d'un certain rang.

1.1 Supremum / Infimum / Minimum / Maximum

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui le distingue de $\mathbb{Q}$:

"Tout ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet un plus grand minorant dans $\mathbb{R}$"

Def : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (A sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$).

- Minimum : S'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leqslant x$, on dit que m est le minimum de A.
- Maximum : S'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $M \geqslant x$, on dit que M est le maximum de A.

__Exemple :__ Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ 0 < x \leq 1\}$

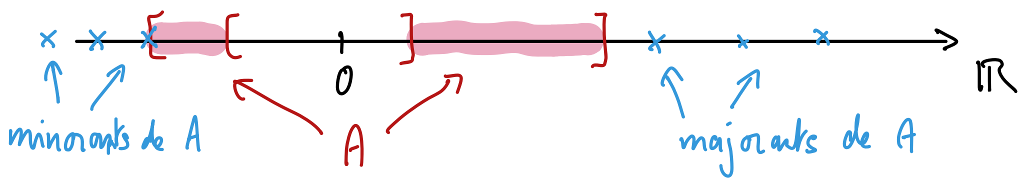
- A admet un maximum qui est 1 ($1 \in A$)
- A n'admet pas de minimum

en effet, $\forall x \in A$, $\frac{x}{2} \in A$ et $\frac{x}{2} < x$ donc x n'est pas le minimum.

__Remarque :__ s'il existe, le minimum (resp. le maximum) est unique.

__Def :__ __Minorant__ : x est un minorant de A si $\forall a \in A$, on a $x \leq a$

__Majorant__ : x est un majorant de A si $\forall a \in A$, on a $x \geq a$



- __Minoré__ : A est minoré s'il existe un minorant
  (c-à-d : $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in A$, $x \leq a$)
- __Majoré__ : A est majoré s'il existe un majorant
- __Borné__ : A est borné s'il existe un majorant __et__ un minorant.

__Exemple :__ $A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 1\}$

$(x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} < 1) \iff (x > 1)$

donc $A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 1\}$ → A est minoré (par 1, par 0, ...)

→ A n'est pas majoré.

__Infimum (ou borne inférieure) de A__ : c'est le plus grand minorant de A, s'il existe.

- Il est noté $\inf(A)$.
- C'est le maximum de l'ensemble de minorants.

__Thm (admis) :__ Tout sous-ensemble non-vide minoré de $\mathbb{R}$ admet un infimum dans $\mathbb{R}$.

(pas vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$)

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R} ;\ x > 0 \text{ et } x^2 > 2\}$

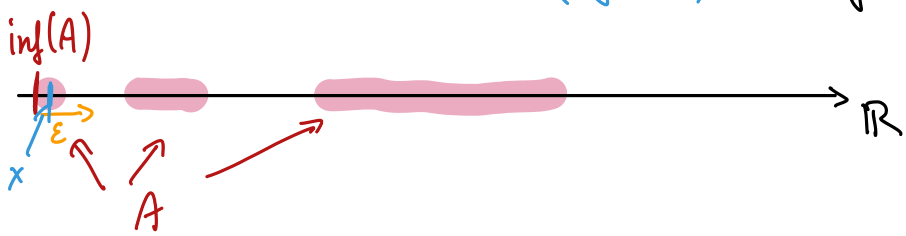
A est minoré, A non-vide ($2 \in A$) donc A admet un infimum.

Exercice : montrer $\begin{cases} \inf(A) \geq 0 \\ (\inf(A))^2 = 2 \end{cases} \longrightarrow$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Propriétés de l'infimum / borne inférieure :

- Si $\min(A)$ existe, alors $\inf(A) = \min(A)$
- $\forall b \in \mathbb{R}$, b minorant de A, on a $b \leqslant \inf(A)$.
- (caractérisation analytique de l'infimum) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\quad \exists x \in A,\quad (\inf(A) \leqslant)\, x \leqslant \inf(A) + \varepsilon \qquad (*)$$



Preuve de $(*)$ par contradiction :

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ satisfait non $(*)$ c'est à dire :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\quad \forall x \in A,\quad x > a + \varepsilon$$

ceci implique que $a + \varepsilon$ est un minorant de A, or $a + \varepsilon > a$

donc a n'est pas l'infimum. $\blacksquare$

De manière analogue :

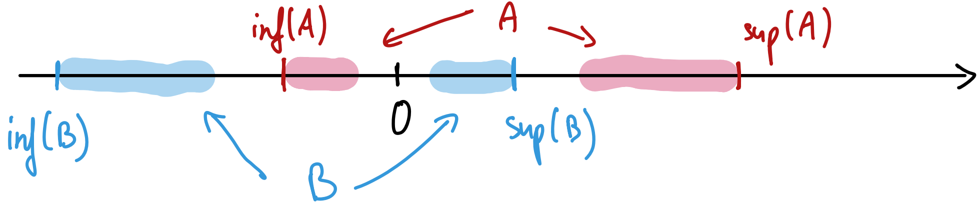
aussi appelé "borne supérieure"

Def : le supremum de A, noté $\sup(A)$, est le plus petit des majorants de A, s'il existe.

$\boxed{\text{Thm : Tout ensemble non-vide majoré de } \mathbb{R} \text{ admet un supremum dans } \mathbb{R}.}$

Lien entre inf et sup : soit $B = \{x \in \mathbb{R} ;\ -x \in A\}$

alors : $\begin{cases} \inf(B) = -\sup(A) \\ \sup(B) = -\inf(A) \end{cases}$



<u>Propriétés</u> : $\bullet\ \forall x \in A,\quad \sup(A) \geq x$

$\bullet\ \forall b \in \mathbb{R},\ b$ majorant de A, on a $b \geq \sup(A)$.

$\bullet\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\quad \sup(A) - \varepsilon \leq x$

<u>Convention</u> : • si A n'est pas minoré, on note $\inf(A) = -\infty$.

• si A n'est pas majoré, on note $\sup(A) = +\infty$.

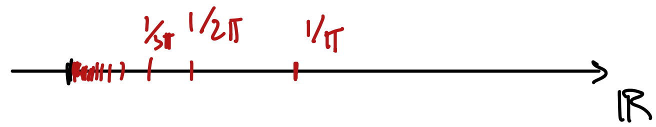
<u>Exemple</u> : $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ ;\ x > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right\}$

$$\left(x > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\right) \iff \left(x > 0 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{x} = k\pi\right)$$

$$\iff \left(\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{x} = k\pi\right)$$

$$\iff \left(\exists k \in \mathbb{N}^*,\ x = \frac{1}{k\pi}\right)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} \ ;\ k \in \mathbb{N}^* \right\}$$



• On a, A est majoré : par $\frac{1}{\pi}$, par 1, ...

• $\sup A = \frac{1}{\pi} = \max A$

• A minoré (par exemple 0 ou -1 sont des minorants).

• $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon > \frac{1}{k\pi}$ donc ε n'est pas un minorant.

Donc 0 est le plus grand des minorants, c-à-d $0 = \inf(A)$.

• $0 \notin A$ donc A n'admet pas de minimum.

<u>1.2 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$</u>

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ ;\ x \geq 0\}$ $\qquad \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \ ;\ x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \ ;\ x \leq 0\}$ $\qquad \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \ ;\ x < 0\}$

Intervalles de $\mathbb{R}$: ensemble des réels compris entre deux bornes. Soient $a < b$:

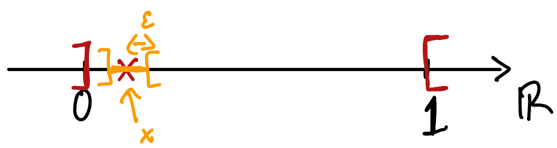
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x < b\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leqslant a\}$
- $]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > b\}$

Remarque : $]a, a[= \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$.

Definition : • $A \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert si
$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$

• $A \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exemple : $A =]0, 1[$ est ouvert



Preuve : soit $x \in A$.

- si $x \leqslant \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset]0, 1[$
- si $x > \frac{1}{2}$, on prend $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{3x-1}{2}, \frac{x+1}{2}[\subset]0, 1[$

Autres exemples : . ouverts : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]\frac{-3}{\sqrt{2}}, 0[\cup]0, 10[$, $\mathbb{R}^*$
. fermé : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{3\} \cup [0, 2]$.

fin 26/09