

Exercice 1. a) Montrer l'identité de Pascal, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k$ tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

par un calcul direct.

b) Montrer, par récurrence et en utilisant le point précédent que, que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \text{ est un entier.}$$

Solution.

a) En utilisant $m! = m \cdot (m-1)!$, nous calculons directement

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

b) Définissons la propriété

$$P(n) : \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ le nombre } \binom{n}{k} \text{ est entier.}$$

On doit montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Ancrage : pour $n = 0$, la propriété à montrer est

$$P(0) : \text{ pour tout } k \in \{0\} \text{ le nombre } \binom{0}{k} \text{ est entier.}$$

Soit donc $k = 0$. On a alors,

$$\binom{0}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1,$$

qui est bien un nombre entier.

- Pas de récurrence : Supposons que

$$P(n) : \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ le nombre } \binom{n}{k} \text{ est entier.}$$

est vrai et montrons que

$$P(n+1) : \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n+1\} \text{ le nombre } \binom{n+1}{k} \text{ est entier.}$$

est vrai.

Soit donc $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ quelconque. On distingue 3 cas :

i) Si $k = 0$.

On a alors,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1,$$

qui est un nombre entier.

ii) Si $k = n+1$.

On a alors,

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+1-n-1)!} = 1,$$

qui est un nombre entier.

iii) Si $1 \leq k \leq n$.

On a alors, par l'identité de Pascal,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, vu que $k, k-1 \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\binom{n}{k} \text{ et } \binom{n}{k-1} \text{ sont des nombres entiers.}$$

Vu que la somme de nombres entiers est un nombre entier, on a le résultat.

Exercice 2.

a) Montrer la formule du binôme de Newton, c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

b) En déduire que, pour tout entier n , on a

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Solution.

a) Ancrage : Pour $n = 0$, le membre de gauche est $(a+b)^0 = 1$, tandis que le membre de droite est

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Vu qu'on obtient la même chose, le résultat est vrai pour $n = 0$.

Pas d'induction : Supposons que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (\text{H.R.})$$

et montrons que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

On a

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{H.R.}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $k+1=j$ dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}\end{aligned}$$

Vu que la variable de sommation (j ou k) est muette (i.e. le nom de la variable ne change pas la valeur de la somme) on peut remplacer j par k dans la première somme. On obtient

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}.\end{aligned}$$

On utilise l'identité de Pascal et le fait que pour tout m , $\binom{m}{m} = 1$ et $\binom{m}{0} = 1$ pour déduire

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

b) Pour $a = b = 1$, on a par le binôme de Newton,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

qui est le résultat voulu.

Exercice 3.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- La somme de deux rationnels est rationnelle.
- La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
- La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.
- Le produit de deux rationnels est rationnel.

- e) Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
 f) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.

Solution.

- a) VRAI.
 En effet $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Cela est vrai pour la différence aussi.
 b) FAUX.
 Par exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme est rationnelle.
 c) FAUX.
 En effet si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors si $a + b \in \mathbb{Q}$ on aurait $b = (a + b) - a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.
 d) VRAI.
 En effet $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$
 e) FAUX.
 Prendre par exemple $a = \sqrt{2} = b$ sont irrationnels, mais $ab = 2$ ne l'est pas.
 f) FAUX.
 Prendre par exemple $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4.

Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Solution.

On raisonne comme dans le cours. Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. On peut donc écrire $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$ avec a ou b impair (sinon on peut simplifier la fraction). Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \implies a^3 = 2b^3 \implies a^3 \text{ est pair} \implies a \text{ est pair,}$$

où, pour la dernière implication, on utilise le même argument que dans le cours : si a était impair, disons $a = 2k + 1$, alors $a^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(\dots) + 1$ serait aussi impair. Donc a est forcément pair. Il suit que $a = 2c$, pour un $c \in \mathbb{Z}$ et on trouve donc l'équation

$$(2c)^3 = 2b^3 \implies 8c^3 = 2b^3 \implies 4c^3 = b^3 \implies b^3 \text{ est pair} \implies b \text{ est pair,}$$

où l'on a utilisé le même argument qu'avant dans la dernière implication. C'est absurde, car on a supposé que soit a soit b était impair. On conclut que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

La preuve pour $\sqrt{3}$ est similaire. On suppose que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, et on écrit $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec a ou b non-divisible par 3. Par le même argument que plus haut, on trouve que $a^2 = 3b^2$, donc a^2 est un multiple de 3, et il suit que a est lui aussi un multiple de 3 : sinon, a s'écrit comme $3k + 1$ ou $3k + 2$, et on vérifie que ces expressions élevées au carré ne donnent pas de multiple de 3. On continue sur les même lignes : on trouve que $a = 3c$, puis en remplaçant dans l'équation on trouve que b^2 doit lui aussi être un multiple de 3. C'est à nouveau absurde (on avait supposé que soit a soit b n'était pas un multiple de 3), et ainsi $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5.

Réécrire les ensemble suivants en utilisant la notation d'intervalles.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$.
 b) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$.
 c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$.
 d) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x < 3 \text{ et } x^2 \geq 4\}$.
 e) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$.

Solution.

$$a) A =] - \infty; 1[.$$

$$b) A = [-1, +\infty[.$$

$$c) A =] - \infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

$$d) A =] - 3, -2] \cup [2, +\infty[.$$

$$e) A =] - \infty, -\sqrt[3]{3}].$$

Rappel. Soit un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$.

i) A est **ouvert** si pour tout $x \in A$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon; x + \epsilon[\subset A$.

ii) A est **fermé** si son complémentaire $A^c := \mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exercice 6.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer, à l'aide de la définition d'ensembles ouverts et fermés, les propositions suivantes.

a) $]a; b[$ est ouvert

c) $[a; b]$ est fermé

b) $] - \infty; a[$ est ouvert

d) $[a; b[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Solution.

a) Soit $x \in]a, b[$. Nous posons $\epsilon := \min\left(\frac{x-a}{2}; \frac{b-x}{2}\right)$, qui assure que $]x - \epsilon; x + \epsilon[\subset]a; b[$. En effet, si $y \in]x - \epsilon; x + \epsilon[$, nous avons d'une part

$$y < x + \epsilon < x + \frac{b-x}{2} = \frac{b+x}{2} < \frac{b+b}{2} = b.$$

D'autre part

$$y > x - \epsilon > x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > \frac{a+a}{2} = a.$$

Donc on a bien $y \in]a, b[$.

b) Soit $x \in] - \infty; a[$. Nous posons $\epsilon := \frac{a-x}{2}$, qui assure que $]x - \epsilon; x + \epsilon[\subset] - \infty; a[$. En effet, si $y \in]x - \epsilon; x + \epsilon[$, nous avons

$$y < x + \epsilon = x + \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2} < \frac{a+a}{2} = a.$$

Donc on a bien $y \in] - \infty; a[$.

c) Nous devons montrer que le complémentaire $[a; b]^c =] - \infty; a[\cup]b; \infty[$ est ouvert. L'intervalle $] - \infty; a[$ est ouvert par le point b). L'ouverture de $]b; \infty[$ se montre exactement de la même manière.

d) $[a; b[$ n'est pas ouvert, car en choisissant $x = a$, aucun intervalle de la forme $]a - \epsilon; a + \epsilon[$ ne peut appartenir à $[a; b[$ ("ça dépasse à gauche"). Plus précisément, on peut trouver

$$y := \frac{a-\epsilon}{2} \in]a - \epsilon; a + \epsilon[, \quad \text{mais } y \notin [a, b[.$$

$[a; b[$ n'est pas fermé, car le complémentaire $[a; b]^c =] - \infty; a[\cup [b; \infty[$ aura le même problème en $x = b$.

Exercice 7.

Parmi les sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}$ suivants, déterminer s'ils sont majorés, minorés ou bornés, calculer $\sup(A)$ et $\inf(A)$, ainsi que $\max(A)$ et $\min(A)$ (s'ils existent).

- a) $A =]-1, \sqrt{2}]$.
 b) $A =]\sqrt{3}, \infty[$.
 c) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
 d) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
 e) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
 f) $A = \mathbb{Q}$.
 g) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.

Solution.

- a) L'ensemble est borné, $\sup A = \max A = \sqrt{2}$, $\inf A = -1$ et $\min A$ n'existe pas.
 b) L'ensemble est minoré mais pas majoré. On a $\sup A = +\infty$ (et donc n'existe pas dans $\mathbb{R}$), $\inf A = \sqrt{3}$ et $\max A$ et $\min A$ n'existent pas.
 c) L'ensemble A est borné : majoré par 1 (puisque $\frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et minoré par 0 (car $\frac{1}{n} > 0$). Comme 1 est un majorant qui est dans A , on a $\max A = 1$, et donc $\sup A = \max A = 1$. Pour $\inf A$, on a $\inf A = 0$: On sait déjà que 0 est un minorant, mais est-ce le plus grand ? Si $x > 0$, alors on choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{x}$. Si $a = \frac{1}{n}$, alors $a < x$, et x ne minore donc pas A . Donc 0 est bien le plus grand minorant, d'où $\inf A = 0$. Comme $0 \notin A$, $\min A$ n'existe pas.
 d) L'ensemble est borné : majoré par $\frac{1}{2}$ (puisque $\frac{(-1)^n}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n}$ si n est impair, et $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ si n est pair) et minoré par -1 (car $\frac{(-1)^n}{n} \geq 0 \geq -1$ si n est pair, et $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \geq -1$ si n est impair). Comme $\frac{1}{2} \in A$, on a $\max A = \frac{1}{2} = \sup A$, et comme $-1 \in A$, on a $\min A = -1 = \inf A$.
 e) L'ensemble est borné : majoré par 1 (puisque $n < n+1 \implies \frac{n}{n+1} < 1$) et minoré par 0 (car $\frac{n}{n+1} \geq 0$). Comme $0 \in A$, on a $\min A = \inf A = 0$. Pour $\sup A$, il faut montrer que 1 est le plus petit majorant. Avec le théorème "ε-sup/pince à épiler", il suffit de montrer que si $\epsilon > 0$, il existe un $a \in A$ tel que $1 - \epsilon \leq a$. On a

$$1 - \epsilon \leq \frac{n}{n+1} \iff 1 - \frac{n}{n+1} \leq \epsilon \iff \frac{1}{n+1} \leq \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} - 1 \leq n.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il suffit donc de choisir $n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$, et en posant $a = \frac{n}{n+1}$, on a trouvé un élément $a \in A$ tel que $1 - \epsilon \leq a$. Donc $1 = \sup A$, et comme $\frac{n}{n+1} < 1$ pour tout n , il suit que $\sup A \notin A$ et donc $\max A$ n'existe pas.

- f) L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$ qui est non borné, et $\mathbb{Q}$ n'est donc pas borné non plus. On a $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$, tous les deux n'existent donc pas dans $\mathbb{R}$, et $\max A$ et $\min A$ n'existent pas.
 g) L'ensemble est borné : majoré par $\sqrt{2}$ et minoré par $-\sqrt{2}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe des rationnels $a \in \mathbb{Q}$ arbitrairement proches (mais plus petits) que $\sqrt{2}$. Donc, si $\epsilon > 0$, il existe un $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} - \epsilon < a < \sqrt{2}$. Il suit que $\sup A = \sqrt{2}$ (cf théorème "ε-sup/pince à épiler"). On montre similairement que $\inf A = -\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sup A = \sqrt{2} \notin A$ et donc $\max A$ n'existe pas. Similairement, $\min A$ n'existe pas.

Exercice 8.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vidé. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Si $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \in A$, alors A est un intervalle fermé.
 b) Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \in A$.
 c) Si $\sup(A) \in A$ et $\inf(A) \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert (ouvert d'un côté, fermé de l'autre).
 d) Si $\sup(A) = \inf(A)$, alors A est un singleton.
 e) Si A est minoré, alors $\inf(A) \notin A$.
 f) Si A est majoré, alors $\max(A)$ existe.

Solution.

- a) FAUX. Contre-exemple : $A = [0, 1[\cup]1, 2]$ n'est pas un intervalle.
- b) VRAI. Si $A = [a, b]$, alors $a = \inf A \in A$ et $b = \sup A \in A$, ce qui est facile à vérifier à partir de la définition de Inf et Sup d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
- c) FAUX. Prenons $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. On a bien $1 = \sup A \in A$ et $0 = \inf A \notin A$ mais A n'est pas un intervalle semi-ouvert, c'est un ensemble de rationnels.
- d) VRAI. Par définition des bornes inférieures et supérieures, A est non vide. De plus $\sup A$ et $\inf A$ sont par définition respectivement un majorant et un minorant de A . Ainsi, en notant $M = \sup A = \inf A$ on a

$$\forall x \in A, M \leq x \leq M.$$

On en déduit que $A = M$ et donc que A est un singleton.

- e) FAUX. Contre-exemple : $A = [0, 1]$ est minoré par $0 = \inf A \in A$.
- f) FAUX.
Contre-exemple : $A = [0, 1[$ est majoré par 1, mais $\max(A)$ n'existe pas.