

Partie I. Min/max/inf/sup

Exercice 1.

Pour tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ suivants, déterminer s'ils sont majorés, minorés ou bornés, puis donner (sans faire de calculs) $\sup(A)$ et $\inf(A)$, ainsi que $\max(A)$ et $\min(A)$ (s'ils existent).

- | | | |
|---|--|---|
| a) $A =]-1, \sqrt{2}]$. | e) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. | i) $A = \{2n - n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ |
| b) $A =]\sqrt{3}, \infty[$. | f) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. | j) $A = \{x \mid 2x - x^2 > 0\}$ |
| c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \leq 1\}$. | g) $A = \{2 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ | k) $A = \left\{ x \mid \frac{3-x}{x-x^2} \geq 0 \right\}$ |
| d) $A = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. | h) $A = \{2 + (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ | l) $A =]0; 1[\cap \mathbb{Q}$. |

Exercice 2.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer les propositions suivantes.

- a) Si A est majoré, alors nous avons l'équivalence

$$\max(A) \text{ existe} \iff \sup(A) \in A.$$

- b) Si A est minoré, alors nous avons l'équivalence

$$\min(A) \text{ existe} \iff \inf(A) \in A.$$

Exercice 3.

Soit A est un intervalle de la forme $]a, b[$, $[a, b[$, $[a, b]$ ou $]a, b]$. Montrer que $\inf(A) = a$ et $\sup(A) = b$.

Partie II. Construction de nombres irrationnels

Exercice 4 (Fin de la preuve du §1.7 du cours).

Soit

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}.$$

- a) Montrer que pour tout $y > 0$ satisfaisant $2 < y^2$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$2 < \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 < y^2.$$

- b) En déduire que $\sup(A)$ est une solution de l'inéquation $x^2 \leq 2$.

Exercice 5.

Soit $a > 0$ et

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < a\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\sup(A)$ est une solution de $x^2 = a$.

- Montrer que A est non-vide et que $\sup(A)$ existe.
- Montrer que $\sup(A)$ satisfait $x^2 \geq a$.
- Montrer que $\sup(A)$ satisfait $x^2 \leq a$.
- Conclure.

Exercice 6 (Challenge facultatif).

Construire une solution $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de l'équation $x^3 = 2$.