EPFL — Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC — 30 septembre 2024

Analyse I – Série 3

Remarque générale.
Pour les exercices de type Vrai ou Faux (V/F), répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Let exercices indiqués par $(*)$ sont un peu plus difficiles et peuvent être sautés en première lecture.

Valeur absolue. La (fonction) valeur absolue, notée $|\cdot|$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0, \\ -x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Echauffement 1. (Inégalité triangulaire) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \qquad \text{et} \qquad |x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|.$$

Exercice 1. (Nombres irrationnels)

Démontrer que les nombres réels r suivants sont irrationnels

a) $r = \sqrt{3}$ b) $(*)$ $r = \sqrt{7+\sqrt{17}}$ c) $(*)$ $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Exercice 2. (Intervalles)

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$ f) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Exercice 3. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré ou minoré dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble est majoré, trouver son supremum et s'il est minoré, trouver son infimum. Dans chaque cas, étudier si le supremum (l'infimum) appartient à l'ensemble.

a) $A =]-1, \sqrt{2}]$ b) $B =]\sqrt{2}, \infty[$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 1\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

e) $E = \mathbb{Q}$ f) $F = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$

Exercice 4. (Rationnels, irrationnels)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse. V F

a) La somme de deux rationnels est rationnelle. ☐ ☐
b) La somme de deux irrationnels est irrationnelle. ☐ ☐
c) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle. ☐ ☐
d) Le produit de deux rationnels est rationnel. ☐ ☐
e) Le produit de deux irrationnels est irrationnel. ☐ ☐
f) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel. ☐ ☐

Exercice 5. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse. V F

a) Si $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \in A$, alors A est un intervalle fermé. ☐ ☐
b) Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \in A$. ☐ ☐
c) Si $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert. ☐ ☐
d) Si $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf} A$, alors A est un point. ☐ ☐
e) Si A est minoré, alors $\operatorname{Inf} A \notin A$. ☐ ☐
f) Si A est majoré, alors $\max A$ existe. ☐ ☐

Exercice 6. (Ecart)(*) Soit A une partie (autrement dit, un sous-ensemble) non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x-y| : (x,y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majoré.

2. Prouver que $\operatorname{Sup} B = \operatorname{Sup}(A) - \operatorname{Inf}(A)$.

Exercice 7. (Intervalles)

Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous, essayer de les exprimer en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1000\}$.
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 100\}$.
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 27\}$.
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 33\}$.
e) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
f) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| < 7\}$.
g) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.
h) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
i) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}$.
j) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$
k) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$.
l) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}$

Exercice 8. (Valeur absolue) Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \qquad \text{et} \qquad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 9. (Existence de $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$) Soit $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ et } x^2 < 2\}$. Montrer que A admet un supremum dans $\mathbb{R}$, noté $a = \operatorname{Sup} A$, et qu'il satisfait $a \geq 0$ et $a^2 = 2$ (c'est à dire $\operatorname{Sup} A = \sqrt{2}$). Indication : pour montrer $a^2 = 2$, on pourra montrer par l'absurde que $a^2 \geq 2$ et puis que $a^2 \leq 2$.