Table de vérité :

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

<u>Exemple :</u> A : " Julie est sous son parapluie "
B : " Il pleut "

(*) $A \Rightarrow B$: si Julie est sous son parapluie alors il pleut.
(" $\Rightarrow$ " est différent de la notion de causalité).

0.3.2 Techniques de preuves

(i) <u>Par l'absurde :</u> pour montrer A, on montre $\text{non}(A) \Rightarrow \text{Faux}$
vérifier $A \Leftrightarrow [\text{non}(A) \Rightarrow \text{Faux}]$ à l'aide d'une table de vérité

(ii) <u>Par contraposée :</u> pour montrer $A \Rightarrow B$ on montre $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$
vérifier $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)]$ (table de vérité).

Contraposée de (*) :
" S'il ne pleut pas alors Julie n'est pas sous son parapluie ".

fin 19/09

(iii) <u>Par récurrence :</u>

<u>Théorème :</u> Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de n, tel que :
- $P(n_0)$ est vrai ← initialisation
- $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ← hérédité

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, on a $P(n)$ est vraie.

Exemple : Soit $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
Montrer que " $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ " : $P(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- Initialisation : $n_0 = 1$

  On a $S(1) = 1$ et $\frac{n_0(n_0+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$ $\}$ donc $P(1)$ vraie

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie.

$$
\begin{aligned}
S(n+1) &= 1 + \dots + n + (n+1) \\
&= S(n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(en utilisant } P(n)\text{)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- Conclusion : Par récurrence, il s'ensuit que $P(n)$ vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

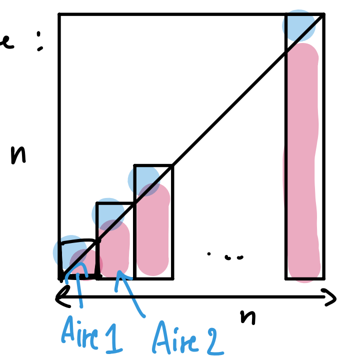
Autres démonstrations :

- Astucieuse :

$$
\begin{aligned}
S(n) + S(n) &= \overset{n+1}{\boxed{\begin{matrix}1\\+n\end{matrix}}} + \overset{n+1}{\boxed{\begin{matrix}2\\+(n-1)\end{matrix}}} + \dots + \overset{n+1}{\boxed{\begin{matrix}n\\+1\end{matrix}}} \\
&= (n+1) \cdot n
\end{aligned}
$$

donc $2S(n) = n(n+1) \Rightarrow S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

- Géométrique :



$$
\begin{aligned}
\text{Aire} = S(n) &= \text{Aire en rouge} + \text{Aire en bleu} \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

0.3.3 Rappels sur les sommes et produits.

Notations : Σ somme, Π produit

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad , \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Exemple : $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

variable muette . choix particulier $a_k = k$

Règles de calcul : Pour $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$, $\ell \leqslant m \leqslant n$

- $\sum_{k=\ell}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=\ell}^{n} a_k$, $\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$

- $\left(\prod_{k=\ell}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=\ell}^{n} a_k$, $\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$

Convention : $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ si $m > n$ et $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$ si $m > n$.

Formules importantes :

(i) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Plus généralement : $\sum_{k=m}^{n} a^k = (\text{premier terme}) \cdot \frac{1 - a^{\text{nb de termes}}}{1 - a}$

$$= a^m \cdot \frac{1 - a^{n-m+1}}{1 - a}$$

Preuve (pour $m = 0$) :

$$(1-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \quad \Big\downarrow k' = k+1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k'=1}^{n+1} a^{k'} \quad \Big\} \text{ somme téléscopique}$$

$$= a^0 - a^{n+1}$$

Puis diviser par $1 - a$: on obtient $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

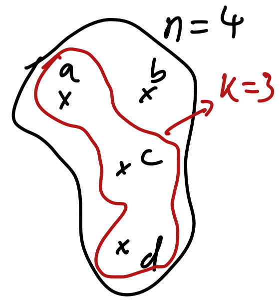
(ii) Notation "n factorielle" : Soit $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k & (\text{si } n \in \mathbb{N}^*) \\ 0! = 1 \end{cases}$

(iii) Coefficients binomiaux : Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$.

$\binom{n}{k}$ = nb de sous-ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments.

se lit "k parmi n"

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$



Remarquons $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

En résumé : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

(iv) Formule du binôme (de Newton) : $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \underset{1}{(a+b)}\cdot\underset{2}{(a+b)}\cdot \ldots \cdot\underset{n}{(a+b)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

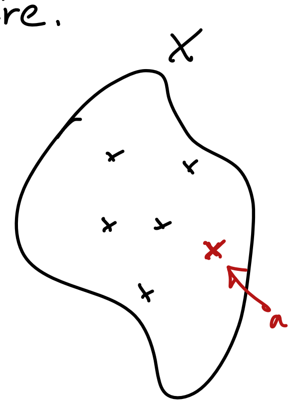
nb de choix de k facteurs "a" parmi les n possibles quand on développe.

(v) Formule du triangle (de Pascal) : Pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k+1 \leq n$

$$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

Soit X un ensemble à n+1 éléments et $a \in X$ arbitraire.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\text{nb de choix}\\ \text{de } k+1 \text{ éléments}\\ \text{dans } X\end{bmatrix}}_{\binom{n+1}{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\text{nb de choix}\\ \text{de } k+1 \text{ éléments}\\ \text{contenant } a\end{bmatrix}}_{\binom{n}{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{nb de choix}\\ \text{de } k+1 \text{ éléments}\\ \text{ne contenant pas } a\end{bmatrix}}_{\binom{n}{k+1}}$$



Triangle de Pascal :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{(2\cdot1)(2\cdot1)} = \frac{24}{4} = 6$$

Par exemple :

$$(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= 1a^0\cdot b^4 + 4\cdot a^1\cdot b^3 + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a^3\cdot b^1 + 1\cdot a^4\cdot b^0$$

$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

Rmq :
- on a toujours $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- en prenant $a=b=1$, on a $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

fin cours 23/09

Chapitre 1 : Nombres Réels

Objectif : représenter toutes les grandeurs mesurables, droite numérique sans trou.

Construction de $\mathbb{R}$: