Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques 27 septembre 2023

Exercice 1. *(1 + 2 + 3 + 2 + 2 = 10 points) Burier juin 2006*

La famille Dupont, le père, la mère et leurs 3 filles, et la famille Lampion, le père, la mère et leurs 2 fils ont réservé un rang de 9 sièges pour assister à une projection du film Oppenheimer. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir, si :

a) aucune restriction n'est mise ?
$P_9 = 9! = 362'880$ façons.

b) les familles veulent rester ensemble ?
$P_5 \cdot P_4 \cdot P_2 = 5! \cdot 4! \cdot 2! = 120 \cdot 24 \cdot 2 = 5'760$ façons.

c) chaque couple veut être ensemble et les filles veulent être ensemble ?
$P_2 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_5 = 2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5! = 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 120 = 2'880$ façons.

d) Pendant l'entracte, Monsieur Dupont va acheter 9 cornets glacés. Il y a trois parfums à choix : vanille, fraise et chocolat. Mais il ne connait pas les préférences des personnes. Combien d'assortiments différents de 9 cornets glacés pourrait-il rapporter à l'équipe ?
Il y a $\overline{C}_9^3 = C_{3-1}^{9+3-1} = C_2^{11} = \overline{P}_{9+2}(9;2) = \dfrac{11!}{9! \cdot 2!} = 55$ assortiments possibles.

e) Finalement, Monsieur Dupont prend 1 cornet vanille, 3 cornets fraise et 5 cornets chocolat. De combien de façons peut-il les répartir entre les neuf personnes ?
Il y a $C_1^9 \cdot C_3^8 \cdot C_5^5 = \overline{P}_9(1;3;5) = \dfrac{9!}{1 \cdot 3! \cdot 5!} = 504$ possibilités.

Exercice 2. *(3 + 2 = 5 points)*

Le code d'ouverture d'un coffre-fort se compose de sept chiffres ordonnés. Le propriétaire du coffre-fort a oublié le code, mais il se souvient que ce dernier contient exactement trois fois le chiffre 1 et que les autres chiffres sont tous distincts. ll n'a droit qu'à un seul essai.

a) Quelle est la probabilité qu'il ouvre le coffre ?
Il y a $C_3^7 \cdot A_4^9 = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 105'840$ codes possibles.
La probabilité qu'il ouvre le coffre est de $\dfrac{1}{|S|} = \dfrac{1}{105'840} \cong 0,000945\%$.

b) Quelle est la probabilité qu'il trouve tous les chiffres du code mais pas nécessairement dans le bon ordre ?
Il y a $C_4^9 = \dfrac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$ façons de choisir les 4 chiffres manquants parmi les 9 restants puisque le 1 est déjà pris. La probabilité qu'il trouve le bon quartet vaut $\dfrac{1}{C_4^9} = \dfrac{1}{126} \cong 0,12\%$

Exercice 3. *(3 + 2 = 5 points)*

Chaque matin, Monsieur Douillet sort de chez lui, avec ou sans parapluie selon la météo. Dans sa région, le temps est beau avec probabilité 0.2, couvert avec probabilité 0.3 et mauvais sinon. S'il fait beau, il prend un parapluie en moyenne une fois sur dix, et lorsqu'il le prend, il l'égare avec une probabilité de 95%. Par temps couvert, il prend un parapluie avec probabilité 0.6 et s'il le prend, l'égare avec probabilité de 35%. En cas de mauvais temps, il sort toujours avec un parapluie et ne le perd que rarement, avec une probabilité de 4%.

a) Calculer la probabilité que cet homme oublie un jour, quelque part un parapluie.
On pose B : "il fait beau", C : "il fait couvert" , M : "il fait mauvais",
P : "M. Douillet prend son parapluie" et E : "M. Douillet égare son parapluie"

$P(E) =$
$P(B) \cdot P(P|B) \cdot P(E|(B \cap P)) + P(C) \cdot P(P|C) \cdot P(E|(C \cap P)) + P(M) \cdot P(P|M) \cdot P(E|(M \cap P))$

$= 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,95 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,35 + 0,5 \cdot 1 \cdot 0,04 = 0,019 + 0,063 + 0,02 = 0,102 = 10,2\%$

Bien sûr, pour y voir plus clair, on peut aussi représenter la situation avec un arbre.

b) Cet homme revient un jour chez lui sans parapluie.
Quelle est la probabilité que le temps ait été couvert ce jour-là ?

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C) \cdot P(P|C) \cdot P(E|(C \cap P))}{P(E)} = \frac{0,063}{0,102} \cong 0,6176 = 61,76\%$$

Si on inclut le fait qu'il rentre chez lui sans parapluie aussi lorsqu'il ne l'a pas pris, il vient

$$P(C|E) = \frac{0,063 + 0,3 \cdot 0,4}{0,102 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,4} = \frac{0,183}{0,402} \cong 0,4552 = 45,52\%$$

Exercice 4. *(5 + 2 + 3 = 10 points)*

On lance deux dés équilibrés et on considère les variables aléatoires
X = nombre de multiples de 2 obtenus et Y = nombre de 3 obtenus.

a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y et calculer les espérances de X et Y.

X et Y peuvent prendre des valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

X s'incrémente de 1 si on tire 2, 4 ou 6. Y s'incrémente de 1 si on tire 3.

$P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$, $P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$, $P\{X = 2\} = \frac{1}{4}$. Ainsi $E[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

$P\{Y = 0\} = \frac{25}{36}$, $P\{Y = 1\} = \frac{10}{36}$, $P\{Y = 2\} = \frac{1}{36}$. Ainsi $E[Y] = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple,

$P\{X = 2\} = \frac{1}{4} \neq P\{X = 2|Y = 2\} = 0$ car 3 n'est pas un multiple de 2.

c) Déterminer la covariance de X et Y.
Il faut calculer $E[X \cdot Y]$ pour utiliser la formule $\text{Cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$.

$XY = 1$ si on tire 32, 34, 36 ou 23, 43, 63.
Dans tous les autre cas, $XY = 0$ car il n'y a soit aucun chiffre parmi 2, 4, 6 et $X = 0$, soit aucun 3 et $Y = 0$.
Ainsi, $E[XY] = 0 \cdot P\{XY = 0\} + 1 \cdot P\{XY = 1\} = P\{X = Y = 1\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ d'où

$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] = \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

Exercice 5. *(5 points)*

Loi de De Morgan. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$$

On le montre grâce à la "double-inclusion". Montrons d'abord que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Considérons un élément x de $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c \quad &\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \Rightarrow \quad x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow \quad x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. Considérons un élément x de $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. On a

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \quad &\Rightarrow \quad x \in E_i^c \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad x \notin E_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ &\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \Rightarrow \quad x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait très bien pu montrer cette loi directement en utilisant des équivalences.

Exercice 6. *(4 points)*

Un jeu consiste à lancer 2 pièces de monnaie. On vous donne 3 francs si vous obtenez deux fois faces et 1 franc si vous obtenez une seule face.
Si vous n'obtenez aucune face, vous devez payer k francs.
Combien doit-on donner lorsque l'on obtient aucune face pour que le jeu soit équitable ?

Soit X la variable aléatoire donnant le gain net du joueur.

$E(X) = 3 \cdot \dfrac{1}{4} + 1 \cdot \dfrac{1}{2} - k \cdot \dfrac{1}{4}$ francs.

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$ donc si $k = 4\left(3 \cdot \dfrac{1}{4} + 1 \cdot \dfrac{1}{2}\right) = 5$ francs.

Exercice 7. *(1 + 4 + 3 + 3 + 3 + 1 = 15 points)*

Oui-Oui le chauffeur de taxi a noté le nombre de kilomètres parcourus et le coût des cinq dernières courses qu'il a effectuées.

Nombre de km	14	8	13	9	10
Coût en francs	50	33	46	32	38

a) Déterminer la variable indépendante X et la variable dépendante Y.
 X est le nombre de kilomètres parcourus, Y le coût de la course.

b) Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de kilomètres parcourus.
Noter le détail des calculs.
Déterminer et interpréter l'intervalle construit en statistique à partir ces deux valeurs.

$E[X] = 10,8$ km,

$\text{Var}(X) = E[X^2] - E]X]^2 = \dfrac{14^2 + 8^2 + \cdots + 10^2}{5} - 10,8^2 = 122 - 116,64 = 5,36$

$\sigma = \sqrt{5,36} = 2,32$ km. $\quad 10,8 - 2,32 = 8,48 \quad$ et $\quad 10,8 + 2,32 = 13,12$

La plupart des courses ont une longueur comprise entre 8,5 et 13,1 kilomètres.

c) Sachant que l'espérance du coût vaut 39,8 francs et l'écart type 7,11, calculer le coefficient de corrélation en notant le détail des calculs.
Interpréter ce coefficient de corrélation dans le contexte.

$E[XY] = \dfrac{1}{n} \sum xy = \dfrac{14 \cdot 50 + 8 \cdot 33 + \cdots + 10 \cdot 38}{5} = \dfrac{2230}{5} = 446$

$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] = 446 - 10,8 \cdot 39,8 = 16,16$

$r = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{16,16}{2,32 \cdot 7,11} = 0.98.$

La corrélation entre le coût et la distance des courses est très forte.
$r > 0$ indique que le coût augmente avec le nombre de kilomètres parcourus.

d) Calculer le coefficient de détermination en donnant la formule de calculs.
Interpréter le coefficient de détermination dans le contexte.
$r^2 = 0.98^2 = 0.96$. Le nombre de kilomètres parcourus explique 96% de la variation du coût.
4% dépend d'autres facteurs, en particulier le temps d'immobilisation du taxi dans le trafic.

e) Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de ce nuage de points en donnant les formules des calculs.
Que représente les paramètres a et b dans le contexte ?

$a = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \dfrac{16,16}{5,36} = 3,01$ francs est le coût par kilomètre.

$b = \mu_y - a\mu_x = 39,8 - 3,01 \cdot 10,8 = 7,29$ (7,24) est le coût de prise en charge

Le modèle donne $\quad y = 3,01\,x + 7,29$.

f) Estimer le coût d'une course de 16 km avec ce modèle.
$y = 3,01 \cdot 16 + 7,29 = 55,45$ francs.