Corrigé Préparatoire 10 : Référentiels accélérés ; Statique

1. **Un paquet arrive...**

   (a) Pendant la « chute » du paquet de durée t_c, la planète effectue un tour complet :

   $$v_0 t_c = H = 2\pi R \text{ et } \omega_0 t_c = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R}.$$

   Au moment de l'impact, les repères $(O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3)$ et $(A\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3)$ coïncident.

   (b) Vitesse du paquet lors de l'impact
   — relativement à $\mathcal{O}$: le paquet est en mouvement rectiligne uniforme et donc $\vec{v}_P = \vec{v}_0$
   — relativement à $\mathcal{A}$: la vitesse relative $\vec{v}_P{}'$ est donnée par

   $$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{v}_P{}'$$

   où $\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$ est appelée vitesse d'entraînement. Dans le cas présent

   $$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \omega_0 R \hat{e}_2 = v_0 \hat{e}_2 .$$

   Ainsi $\vec{v}_P = -v_0\hat{e}_1 = v_0\hat{e}_2 + \vec{v}_P{}'$ et donc

   $$\vec{v}_P{}' = -v_0(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = -v_0(\hat{a}_1 + \hat{a}_2).$$

   (c) Trajectoires : voir dessins.

   (d) Accélération du paquet lors de l'impact :

   $$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{\text{relatif}},$$

   avec $\vec{a}_P = \vec{0}$.
   L'accélération d'entraînement est

   $$\vec{a}_P{}^{\mathrm{e}} = \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})}_{\text{centripète}} = -\omega_0 v_0 \hat{e}_1 = -\frac{v_0^2}{R}\hat{e}_1 = -\frac{v_0^2}{R}\hat{a}_1 .$$

   L'accélération de Coriolis est

   $$\vec{a}_P{}^{\mathrm{c}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = -2\omega_0 v_0\, \hat{e}_3 \wedge (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = 2\frac{v_0^2}{R}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2).$$

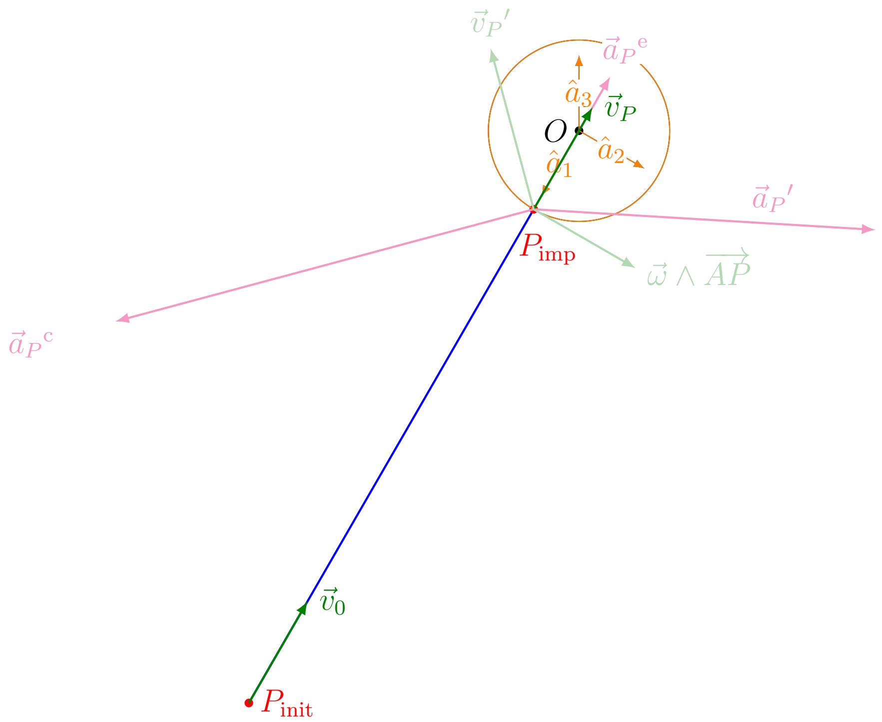
   Ainsi

   $$\vec{0} = \vec{a}_P{}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_P{}^{\mathrm{c}} + \vec{a}_P{}'$$

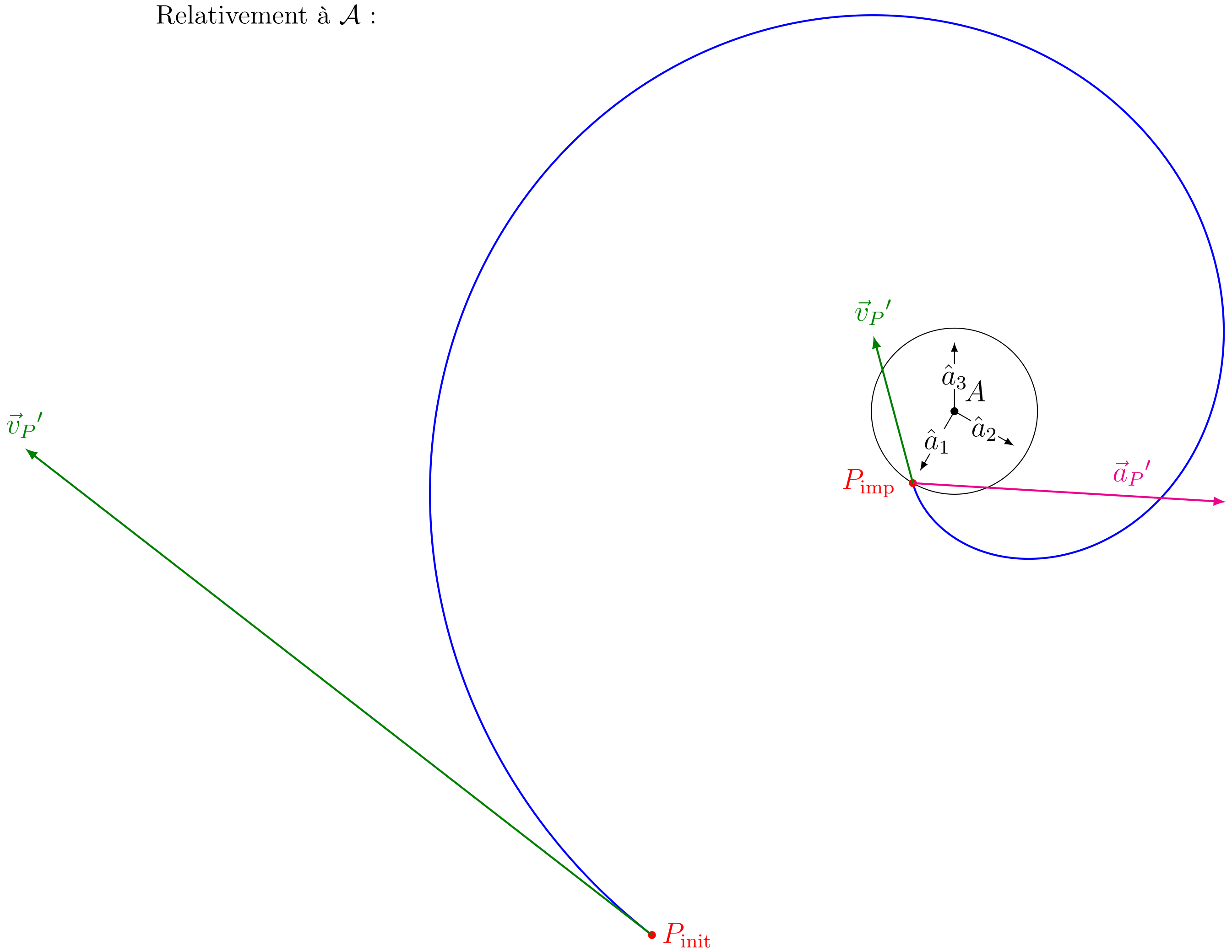
   et donc

   $$\vec{a}_P{}' = -\vec{a}_P{}^{\mathrm{e}} - \vec{a}_P{}^{\mathrm{c}} = \frac{v_0^2}{R}(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2).$$

Relativement à $\mathcal{O}$:



Relativement à $\mathcal{A}$:



2. **Le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel accéléré**

(a) i. Dans le référentiel fixe, le bloc est initialement au repos, $\vec{v}_{\text{init.}} = \vec{0}$, et subit une accélération $g \sin\alpha$ le long du plan incliné (selon $\hat{e}_1$). L'évolution de sa vitesse est donc

$$\vec{v}_1(t) = g \sin\alpha \, t \, \hat{e}_1 \, .$$

Le temps de parcours t_{p} peut être obtenu grâce à la longueur $h/\sin\alpha$ du pacours :

$$s_1(t_{\text{p}}) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t_{\text{p}}^2 = \frac{h}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{p}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} \, .$$

Initialement, dans le référentiel accéléré, le bloc est également au repos, $\vec{v}^{\,\prime}_{\text{init.}} = \vec{0}$. Ensuite, il subit une accélération $g\cos\alpha\sin\alpha$ selon $\hat{a}_1$. L'évolution de sa vitesse est ainsi

$$\vec{v}^{\,\prime}_1(t) = g\cos\alpha\sin\alpha \, t \, \hat{a}_1 \, .$$

ii. Dans le référentiel d'inertie, la vitesse finale du bloc est donnée par

$$\vec{v}_{\text{fin.}} = g\sin\alpha \, t_{\text{p}} \, \hat{e}_1 = \sqrt{2gh} \, \hat{e}_1 \, .$$

Dans le référentiel accéléré, le bloc a, au bas du plan incliné, après un temps t_{p}, une vitesse

$$\vec{v}^{\,\prime}_{\text{fin.}} = \sqrt{2gh} \cos\alpha \, \hat{a}_1 \, .$$

Ainsi, la différence d'énergie cinétique est donnée par, dans le référentiel fixe,

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_{\text{fin.}}^2 - v_{\text{init.}}^2) = mgh \, .$$

Cette expression est différente de celle que l'on obtient dans le référentiel accéléré :

$$\Delta K' = \frac{1}{2} m (v'^2_{\text{fin.}} - v'^2_{\text{init.}}) = mgh\cos^2\alpha \, .$$

iii. Du point de vue du référentiel accéléré, le bloc subit son poids $m\vec{g}$, la force de soutien du plan incliné $\vec{N}$ et une force d'inertie $-m\sin^2\alpha \, \vec{g}$. La résultante des forces agissant sur le bloc correspond donc à la composante selon $\hat{a}_1$ de $\vec{N}$. Cette force est constante, vaut $mg\cos\alpha\sin\alpha$, et son travail entre le sommet et le bas du plan incliné est donné par

$$W^{\prime}_{\text{init.}\to\text{fin.}} = mg\cos\alpha\sin\alpha \cdot \frac{h}{\tan\alpha} = mgh\cos^2\alpha \, .$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donc bien vérifié dans le référentiel accéléré. Remarquons que la force de soutien ne travaille pas dans le référentiel fixe (elle est perpendiculaire au mouvement), alors qu'elle travaille dans le référentiel accéléré (elle n'est alors plus perpendiculaire au mouvement).

(b) i. Par rapport au référentiel fixe $\mathcal{O}$, la vitesse du paquet ne varie pas. La variation d'énergie cinétique est donc nulle :

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_{\text{init}}^2 - v_{\text{imp}}^2) = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_0^2) = 0 \, .$$

Par rapport au référentiel accéléré $\mathcal{A}$, la vitesse initiale est donnée par

$$\vec{v}^{\,\prime}_{\text{init}} = \vec{v}_0 - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\text{init}} \, .$$

Or, les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\text{init}}$ sont perpendiculaires. Le carré de la norme de la vitesse a donc pour expression

$$v'^2_{\text{init}} = v_0^2 + \omega_0^2 r_{\text{init}}^2 \, ,$$

avec $r_{\text{init}} = ||\overrightarrow{AP_{\text{init}}}||$. Quant à la norme de la vitesse au moment de l'impact, elle s'écrit (voir exercice 1)

$$v'_{\text{imp}} = \sqrt{2}v_0\,.$$

La variation d'énergie cinétique est donc donnée par

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m(v'^{\,2}_{\text{init}} - v'^{\,2}_{\text{imp}}) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - \omega_0^2 r_{\text{init}}^2)\,.$$

ii. Dans le référentiel fixe, le paquet ne subit aucune force. Dans le référentiel accéléré, il est soumis à une force d'inertie centrifuge

$$\vec{F}_{\text{inertie}} = -m\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}) = +m\,\omega_0^2\,r\,\hat{e}_r\,,$$

où $r = ||\overrightarrow{AP}||$.

Le travail de la force centrifuge entre le point initial et le point d'impact est donné par

$$\begin{aligned} W'_{\text{init.}\to\text{fin.}} &= \int_{P_{\text{init}}}^{P_{\text{imp}}} \vec{F}_{\text{inertie}}\cdot\vec{dl} = \int_{r_{\text{init}}}^{r_{\text{imp}}} m\omega_0^2 r dr = \frac{m\omega_0^2}{2}(r_{\text{imp}}^2 - r_{\text{init}}^2) \\ &= E_{\text{pot}}(r_{\text{init}}) - E_{\text{pot}}(r_{\text{imp}})\,, \end{aligned}$$

où

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{2}m\,\omega_0^2 r^2 + \text{constante}$$

est l'énergie potentielle associée à la force d'inertie.

Comme $\omega_0 = v_0/r_{\text{imp}}$ (voir exercice 1), le théorème de l'énergie cinétique est donc bien vérifié dans le référentiel accéléré :

$$\Delta K' = W'_{\text{init.}\to\text{fin.}}\,.$$