Corrigé Préparatoire 8 : moment cinétique

1. **Question conceptuelle**

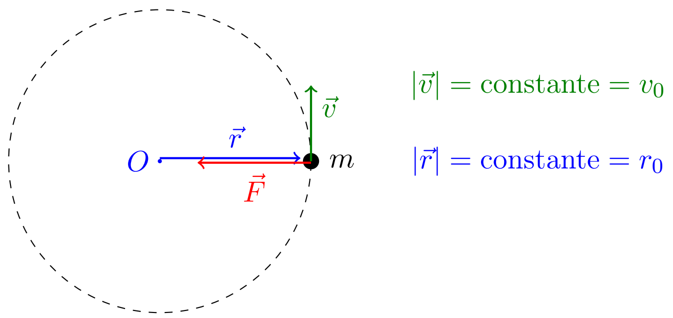
   Cette question a été importante dans la réflexion de Newton et la réponse qu'il a donnée a permis à la science de se distancer de la conception antique qui considérait que la physique des astres était différente de celle des objets communs. La Lune comme la pomme subit une force d'attraction de la part de la Terre. Si une pomme, ou la Lune, est lâchée sans vitesse initiale, elle s'écrasera sur la Terre. Mais que se passe-t-il si la vitesse initiale a une composante transverse (perpendiculaire au vecteur position par rapport au centre de la Terre) non nulle ? Dans le cas de la pomme «sur la Terre», pour des conditions usuelles, la force d'attraction est considérée comme constante (et la surface de la Terre comme plane). Donc la trajectoire résultante est une parabole coupant la surface de la Terre.

   Imaginez maintenant que la pomme puisse être lancée à une très grande vitesse. Il n'est alors plus possible de considérer la force d'attraction comme constante (et la surface de la Terre comme plane). La trajectoire n'est plus une parabole. Il s'agit d'une ellipse qui ramènerait la pomme à sa position initiale si cette trajectoire ne coupait pas la surface de la Terre. C'est la situation de la Lune : la force d'attraction entre elle et la Terre résulte en une trajectoire elliptique qui, étant donné les conditions initiales, ne coupe pas la surface de la Terre. En conclusion, on peut dire en jouant sur les mots, que la Lune «tombe» sur la Terre, mais que, du fait de sa vitesse transverse, elle tombe en fait «à côté de la Terre», et donc elle continue à tomber à l'infini en orbitant autour de la Terre. Pour une explication plus détaillée et imagée, voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=XzYk-V8j_Nk`

   Pour le physicien, la Lune ne tombe pas sur la Terre car son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport à la Terre est conservé. Ceci vient du fait que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune est une force centrale. Le moment cinétique de la Lune vaut $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, où $\vec{r}$ est le vecteur reliant la Terre à la Lune et $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement de la Lune. Pour que la Lune puisse tomber sur la Terre, c'est-à-dire atteindre la position $\vec{r} = 0$, il faudrait que son moment cinétique soit nul, et ceci déjà maintenant. Or ce moment cinétique ne peut être zéro maintenant que si $\vec{p}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si la vitesse de la lune est purement radiale (ou bien nulle). Ceci n'est manifestement pas le cas, la vitesse étant presque exclusivement transverse.

2. **Moment cinétique**

   (a) Le mouvement est circulaire uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est centrale. En choisissant une origine O située au centre du cercle, le moment de cette force est nulle en tout temps : $\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}\,$.



   Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}\,.$$

   En tout point de la trajectoire, ce vecteur est perpendiculaire au plan de la trajectoire. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\odot\vec{L}$. De plus, sa norme est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\alpha = m r_0 v_0 \cdot 1 = m r_0 v_0\,,$$

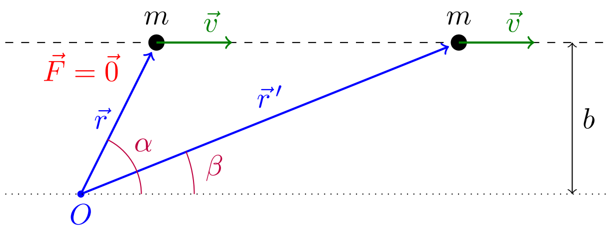
car le vecteur position $\vec{r}$ est, durant le mouvement, toujours perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$. Remarquons que cette conclusion ($\vec{L}$ constant) n'est pas valable pour tout choix de l'origine O. En choisissant par exemple une origine située en-dessous du plan du cercle, on se convainc assez facilement que le vecteur moment cinétique n'est pas constant durant le mouvement.
En accord avec le théorème du moment cinétique, le moment cinétique est bien conservé :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{constant}\,.$$

(b) Le mouvement est rectiligne uniforme. La résultante $\vec{F}$ des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est donc nulle. Par conséquent, le moment de force par rapport à n'importe quelle origine O est nul en tout temps :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}\,.$$

Considérons l'objet de masse m à deux instants :



$$|\vec{v}| = \text{constante} = v_0 \quad \text{et} \quad |\vec{r}|\sin\alpha = b = |\vec{r}\,'|\sin\beta$$

Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{L}' = \vec{r}\,' \wedge m\vec{v}\,.$$

Ces vecteurs sont perpendiculaires au plan formé par la trajectoire et l'origine O, et leur sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\otimes\vec{L}, \vec{L}'$. De plus, la norme du moment cinétique est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}|v_0 \sin\alpha = mb\,v_0 = m|\vec{r}\,'|v_0 \sin\beta = |\vec{L}'|\,.$$

Remarquons que cette conclusion ($\vec{L}$ constant) reste vraie quelle que soit l'origine O choisie. Par exemple, dans le cas d'une origine située sur la trajectoire, le moment cinétique est constamment nul.
Enfin, ce résultat est en accord avec le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{constant}\,.$$

3. **Moment de force : bras de levier**

(a) L'efficacité de la mise en rotation est mesurée par le moment de force de $\vec{F}$ par rapport à A. La norme de ce moment de force est

$$||\vec{M}_A|| = bF\,,$$

où b est le bras de levier et $F = ||\vec{F}||$.
Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est maximale lorsque b est maximal. Ainsi,

$$b = R \quad \text{pour} \quad \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi$$

(la force $\vec{F}$ est alors tangente à la roue).

(b) Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est minimale pour b minimal. Ainsi,

$$b = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

(la force $\vec{F}$ est alors normale à la roue).

(c) On exploite la définition du moment de force par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\,.$$

Selon $\vec{e}_z$, la norme du moment de force s'écrit

$$||\vec{M}_A|| = b(\alpha)\,F = R\,|\cos\alpha|\,F\,,$$

où $F = ||\vec{F}||$.

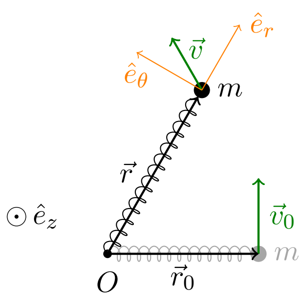
- Pour $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, la rotation induite est de sens trigonométrique et le moment $\vec{M}_A$ est **sortant** :

$$\odot\,\vec{M}_A\,.$$

- Pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, la rotation induite est dans le sens des aiguilles d'une montre et le moment $\vec{M}_A$ est **entrant** :

$$\otimes\,\vec{M}_A\,.$$

4. **Mouvement dans un potentiel central**



Les forces exercées sur l'objet sont son poids, le soutien de la table et la force de rappel du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{S} - k\vec{d} = m\vec{a}\,,$$

où $\vec{d}$ est le vecteur allongement du ressort. L'accélération n'a pas de composante verticale, et dans le plan de la table seule la force de rappel du ressort a une composante non nulle. On peut donc écrire :

$$-k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

La force de rappel du ressort est conservative et toujours dirigée vers O : c'est une force centrale. Par conséquent,

— l'énergie mécanique est conservée :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \forall\,t$$

— le moment cinétique par rapport à O est conservé :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = \ell_0 m v_0 \hat{e}_z \qquad \forall\,t\,,$$

l'axe $\hat{e}_z$ étant dirigé vers le haut (donc sortant du plan de dessin).