Corrigé 7 : énergie et équilibre

1. **Conservation de l'énergie mécanique**
   Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement, les seules forces agissant sur la luge pendant la descente sont la force de gravitation (qui est une force conservative) et le soutien du sol (force de liaison, toujours perpendiculaire à la vitesse). On peut donc exploiter la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = \text{constante}\,.$$

   En choisissant comme niveau de référence le bas de la piste, l'énergie mécanique s'écrit ...

   ... en haut de la piste (avec une vitesse initiale nulle et une hauteur h) :

$$E_{\text{méc.}}(1) = 0 + E_{\text{pot.}} = mgh\,;$$

   ... en bas de la piste (avec une vitesse finale de norme v et une hauteur nulle) :

$$E_{\text{méc.}}(2) = E_{\text{cin.}} + 0 = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

   La conservation de l'énergie mécanique fournit alors

$$E_{\text{méc.}}(1) = E_{\text{méc.}}(2) \quad \Leftrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

   où l'on a pris $g \cong 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

2. **Questions conceptuelles**
   (a) Pour gravir une pente, on exerce une force égale et opposée au poids, $\vec{P}$, qui effectue un travail par unité de temps $dW/dt = Pdh/dt$, où dh/dt est la hauteur parcourue par unité de temps. Si la pente est gravie en zigzag plutôt que tout droit, dh/dt et, par conséquent la puissance fournie, dW/dt, est plus petite.

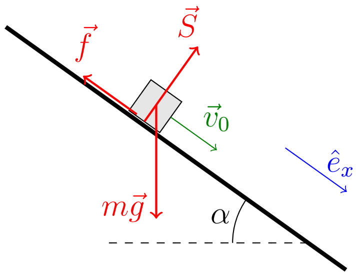
   (b) La caisse subit deux forces, son poids et la force que vous exercez (en réalité, elle subit tout au début une force de réaction du sol, et tout à la fin une force de réaction de la table ; nous ferons comme si ces forces de soutien étaient en fait aussi exercées par vous, autrement dit la situation initiale est une caisse que vous soutenez au niveau du sol et la situation finale est une caisse que vous soutenez au niveau de la table).
   Au départ et à l'arrivée, votre force est égale et opposée au poids, et la caisse est immobile. Donc, entre le départ et l'arrivée, l'énergie cinétique de la caisse n'a pas changé, ce qui signifie que le travail de la résultante des forces qui se sont exercées sur elle pendant la manoeuvre est nul (théorème de l'énergie cinétique) ; on en déduit que le travail de votre force est opposé au travail de poids. Comme le travail du poids vaut $-mgh$, où h est la hauteur de la table, le travail de votre force vaut nécessairement mgh. Ce résultat est d'une simplicité

surprenante, quand on pense que la caisse doit nécessairement subir des accélérations pendant son trajet et donc que votre force ne reste pas constamment égale au poids de la caisse.
Finalement, on a les réponses suivantes aux questions posées dans l'énoncé :
(i) non
(ii) non
(iii) oui
(iv) oui

3. **Théorème de l'énergie cinétique, forces non conservatives, puissance**

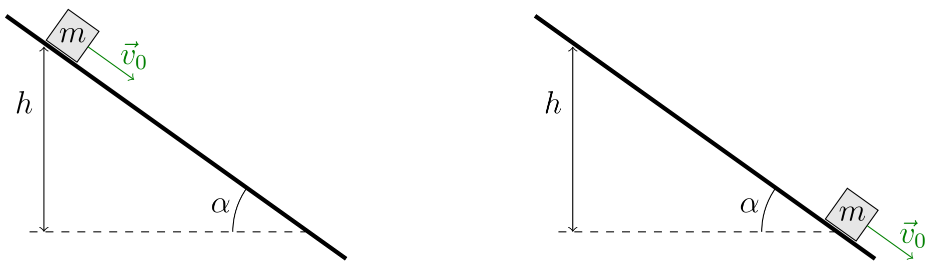
   Nous allons exploiter le théorème de l'énergie entre deux instants t_1 et t_2, ainsi que la définition du travail d'une force.

   (a) Trois forces s'exercent sur le bloc de masse m : une force de frottement $\vec{f}$ tangente à la trajectoire, une force de soutien $\vec{S}$ perpendiculaire à la trajectoire (force de liaison) et la force d'attraction gravitationnelle (poids $m\vec{g}$ du bloc).



   (b) Considérons deux instants t_1 et t_2 :

   i) instant t_1 ii) instant t_2



   En choisissant l'origine comme sur le dessin, les énergies mécaniques en t_1 et t_2 associées au bloc de masse m (assimilé à un point matériel) s'écrivent :

$$E_{\text{méc.}}(1) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \quad \text{et} \quad E_{\text{méc.}}(2) = \frac{1}{2}mv_0^2 \,.$$

   Ainsi, la variation d'énergie mécanique du bloc m sur une dénivellation h est donnée par

$$\Delta E_{\text{méc.}} = E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1) = -mgh \,.$$

   L'énergie mécanique diminue. Il doit donc exister un frottement exercé par le plan incliné qui freine le bloc de masse m.

   (c) Comme le soutien est toujours perpendiculaire au plan incliné, et donc à la trajectoire du bloc, il ne travaille pas :

$$W_{1\to 2}(\vec{S}) = 0 \,.$$

Quant au travail du poids, il s'écrit

$$W_{1\to 2}(m\vec{g}) = mgh\,.$$

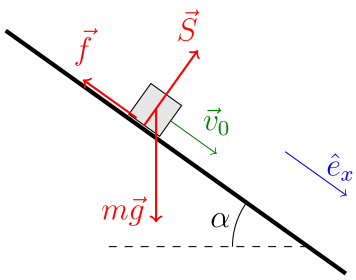
Finalement, la vitesse du bloc étant constante, le théorème de l'énergie cinétique permet de trouver l'expression du travail de la force de frottement :

$$\begin{aligned} E_{\text{cin.}}(2) - E_{\text{cin.}}(1) &= W_{1\to 2}(m\vec{g}) + W_{1\to 2}(\vec{f}) + W_{1\to 2}(\vec{S}) \\ 0 &= mgh + W_{1\to 2}(\vec{f}) + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad W_{1\to 2}(\vec{f}) &= -mgh \\ &= E_{\text{méc.}}(2) - E_{\text{méc.}}(1)\,. \end{aligned}$$

On note bien que le travail des forces non conservatives (ou dissipatives) est égal à la variation de l'énergie mécanique.

(d) Considérons à nouveau l'ensemble des forces s'exerçant sur le bloc de masse m :



La deuxième loi de Newton appliquée au bloc de masse m s'écrit

$$m\vec{g} + \vec{S} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}\,.$$

En projetant selon $\hat{e}_x$, le long de la pente, il vient

$$f = mg\sin\alpha = \text{constante}\,.$$

La force de frottement $\vec{f}$ est donc constante.

(e) On note immédiatement que la puissance instantanée fournie par la force de soutien est nulle (car le travail fourni par cette force de liaison est toujours nul). D'autre part, pendant un intervalle de temps dt, le bloc de masse m se déplace de ds le long du plan incliné et le travail sur le bloc fourni par la force de frottement s'écrit

$$dW_{\vec{f}} = -f\,ds\,.$$

La puissance a donc pour expression

$$P_{\vec{f}} = \frac{dW_{\vec{f}}}{dt} = -f\,\frac{ds}{dt} = -f\,v_0 = -mg\sin\alpha\,v_0\,.$$

Cette puissance est identique, au signe près, à celle fournie par la gravitation (en fait, par la composante du poids parallèle au plan incliné) :

$$P_{m\vec{g}} = -P_{\vec{f}} = +mg\sin\alpha\,v_0\,.$$