Corrigé Préparatoire 5 : Oscillateurs harmoniques

1. **Questions conceptuelles**

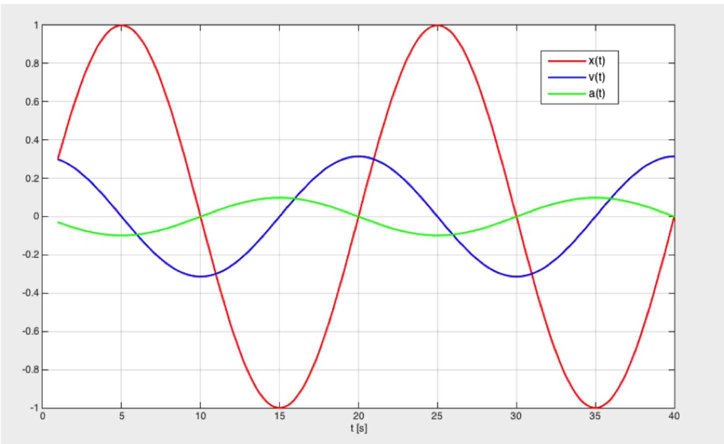
   (a) En redéfinissant l'origine du temps et l'origine de l'espace, l'équation horaire d'un oscillateur harmonique peut toujours se ramener à $x(t) = A\sin(\omega t)$. Sa vitesse et son accélération valent alors $v(t) = A\omega\cos(\omega t)$ et $a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$. On en déduit que ...
   - ... la norme de la vitesse est maximale quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$ où n est un nombre entier.
   - ... l'accélération est nulle quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$.
   - ... la vitesse est nulle quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.
   - ... la norme de l'accélération est maximale pour $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$, c'est-à-dire aux extrêmes $x = \pm A$.

   (b) Oui c'est possible. En effet, pour que la vitesse augmente il faut que l'accélération soit positive (par définition), et il est parfaitement possible qu'une accélération diminue tout en restant positive.
   - Prenons par exemple un objet se déplaçant sur l'axe x, dont l'accélération décroit linéairement en fonction du temps ($a = a_0(1 - \alpha t)$, $a_0 > 0$, $\alpha > 0$). Calculons la variation de l'accélération et de la vitesse entre les temps t et $t + \Delta t$; avec Δt petit :

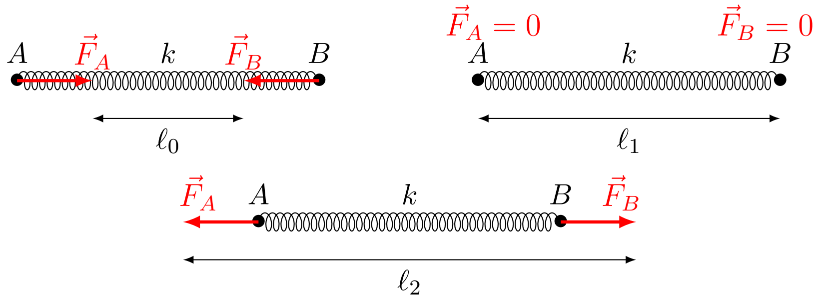
     $$\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t) = a_0(1 - \alpha(t + \Delta t)) - a_0(1 - \alpha t) = -a_0\alpha\Delta t < 0$$

     $$\Delta v \simeq a_0(1 - \alpha t)\Delta t > 0$$

     Donc tant que $\alpha t < 1$, la variation de la vitesse Δv est positive alors que la variation de l'accélération Δa est négative.
   - Imaginez un cycliste dans une pente descendante constante qui pédale au début de la descente, puis se laisse aller en roue libre : l'accélération pendant le laps de temps où il pédale est supérieure à l'accélération s'exerçant lorsqu'il est en roue libre, cependant sa vitesse va continuer à augmenter.
   - Dans le mouvement d'un oscillateur harmonique, tel que représenté dans le graphique ci-après pour une pulsation de $\pi/10$, il y a des temps, entre 15s et 20s ou entre 35s et 40s, pendant lesquels l'accélération décroit (courbe verte) alors que la vitesse augmente (courbe bleue). Ceci peut être exprimé analytiquement en considérant le mouvement $x(t) = A\sin(\omega t)$, d'où la vitesse est $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$, l'accélération est $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t)$, et la variation de l'accélération est $\frac{da}{dt} = -A\omega^3\cos(\omega t)$. La variation de la vitesse est donc de signe opposé à la variation $\frac{da}{dt}$ de l'accélération si $\pi/2 < \omega < \pi$ ou $3\pi/2 < \omega < 2\pi$.



2. **Ressorts**
   - Les forces appliquées aux points A et B sont indiquées en rouge.



— a) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = l_0\,\hat{e}_x$. La force s'écrit donc :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k(x_A - l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{1}$$

b) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = -l_0\,\hat{e}_y$. La force s'écrit donc :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k(y_A + l_0)\,\hat{e}_y\,. \tag{2}$$

c) La position à vide (ou naturelle) du ressort se trouve à $\vec{r}_{\text{nat.}} = -l_0(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)$ et le point A à $\vec{r}_A = -l_A(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)$, où l_A est la longueur totale du ressort (l_0 plus l'allongement). La force s'écrit alors :

$$\vec{F}_A = -k\Delta\vec{r} = -k(\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{nat.}}) = -k[-l_A - (-l_0)]\,(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y) = k(l_A - l_0)(\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y)\,. \tag{3}$$

d) Comme au point a), $\vec{F}_A = -k(x_A - l_0)\,\hat{e}_x$.
e) Pour calculer la force du ressort sur le point A, il faut identifier la position à laquelle le point A ne subirait aucune force. Ce point est à la position $\vec{r}_{\text{nat.}} = \vec{r}_B + l_0\,\hat{e}_x = (x_B + l_0)\,\hat{e}_x$, et donc

$$\vec{F}_A = -k(x_A - (x_B + l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_A - x_B - l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{4}$$

Pour calculer la force du ressort sur le point B, il faut identifier la position à laquelle le point B ne subirait aucune force. Ce point est à la position $\vec{r}_{\text{nat.}} = \vec{r}_A - l_0\,\hat{e}_x = (x_A - l_0)\,\hat{e}_x$, et donc

$$\vec{F}_B = -k(x_B - (x_A - l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_B - x_A + l_0)\,\hat{e}_x\,. \tag{5}$$

On remarque que

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B\,! \tag{6}$$

f) Par un raisonnement similaire à e), on trouve

$$\vec{F}_A = -k(x_A - (x_B - l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_A - x_B + l_0)\,\hat{e}_x\,, \tag{7}$$

et

$$\vec{F}_B = -k(x_B - (x_A + l_0))\,\hat{e}_x = -k(x_B - x_A - l_0)\,\hat{e}_x = -\vec{F}_A\,. \tag{8}$$

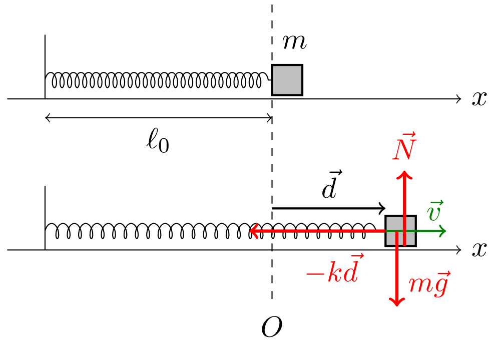
g) De manière générale (pour un ressort rectiligne), on trouve

$$\vec{F}_A = -k\left[\vec{r}_A - \left(\vec{r}_B + l_0\frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}\right)\right]\,, \tag{9}$$

et

$$\vec{F}_B = -k\left[\vec{r}_B - \left(\vec{r}_A + l_0\frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}\right)\right]\,. \tag{10}$$

3. **Oscillateur harmonique horizontal**
Il est généralement judicieux de représenter une situation non particulière, à un instant t quelconque.



(a) Les forces exercées sur la masse sont :
— son poids $m\vec{g}$
— le soutien $\vec{N}$ du rail
— la force de rappel du ressort $-k\vec{d}$.
Comme il n'y a pas d'accélération verticale pour la masse, poids et soutien se compensent :

$$\underbrace{m\vec{g} + \vec{N}}_{\vec{0}} + (-k\vec{d}) = -k\vec{d} = m\vec{a}\,.$$

(b) Pour ce choix de l'origine, la déformation coïncide avec la position : $\vec{d} = x\vec{e}_x$.
L'accélération, comme seconde dérivée de la position, est alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.
Ainsi, la projection selon $\vec{e}_x$ de la deuxième loi de Newton s'écrit

$$-kx = ma = m\ddot{x} \quad \forall\, t$$

et les conditions initiales deviennent

$$x(t_0) = x_0 \quad v(t_0) = v_0\,.$$

(c) Dérivons successivement...

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos\big(\omega_0(t-t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\\
\dot{x}(t) = v(t) &= -\omega_0 x_0 \sin\big(\omega_0(t-t_0)\big) + \omega_0\frac{v_0}{\omega_0}\cos\big(\omega_0(t-t_0)\big)\\
\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t) &= -\omega_0^2 x_0 \cos\big(\omega_0(t-t_0)\big) - \omega_0^2\frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)\,.
\end{aligned}$$

Nous avons bien que position $x(t)$ et accélération $\ddot{x}(t)$ sont liées par

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

D'autre part, les conditions initiales sont effectivement vérifiées :

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= x_0\cos\big(\omega_0(t_0-t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t_0-t_0)\big) = x_0\cos 0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin 0 = x_0\\
v(t_0) &= -\omega_0 x_0 \sin 0 + \omega_0\frac{v_0}{\omega_0}\cos 0 = v_0\,.
\end{aligned}$$

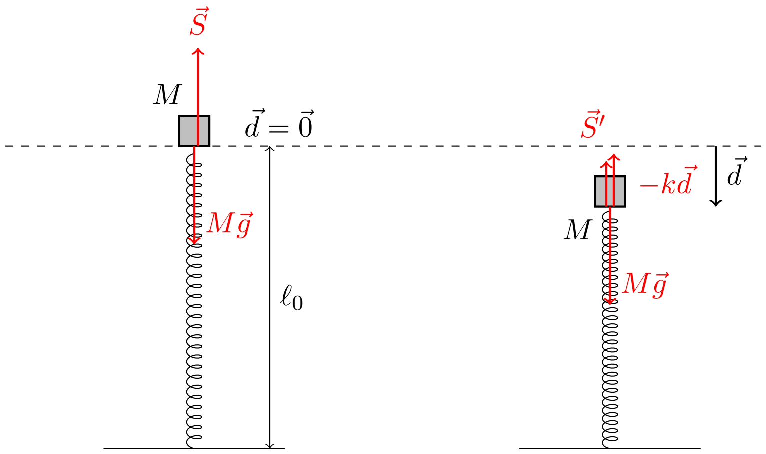
(d) Vérifions la condition de périodicité :

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= x_0\cos\big(\omega_0(t+\tfrac{2\pi}{\omega_0}-t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t+\tfrac{2\pi}{\omega_0}-t_0)\big)\\
&= x_0\cos\big(\omega_0(t-t_0)+2\pi\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)+2\pi\big)\\
&= x_0\cos\big(\omega_0(t-t_0)\big) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big) = x(t) \quad \forall\, t\,.
\end{aligned}$$

La période des fonctions cos et sin étant 2π , $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la plus petite valeur positive vérifiant la condition de périodicité.

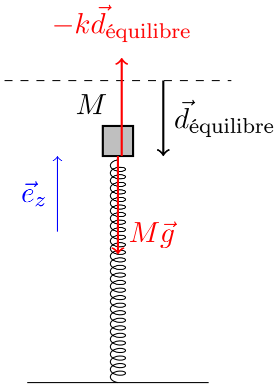
4. **Oscillateur harmonique vertical**

Durant la descente, la compression du ressort augmente et le soutien nécessaire est de plus en plus petit.



sans compression (M est soutenue) — avec compression (M est soutenue)

Enfin, plus aucun soutien n'est requis pour que la masse reste immobile. La déformation atteint alors une certaine valeur pour laquelle le poids est entièrement compensé par la force due au ressort :



avec compression
(M n'est plus soutenue)

Système : objet de masse M

Forces : le poids et la force de rappel du ressort

Loi applicable : 2^{me} loi de Newton (équilibre)

$$M\vec{g} - k\vec{d}_{\text{équilibre}} = \vec{0}\,.$$

Remarque : la force élastique est dirigée vers le haut. Seule sa norme est inconnue.

En projetant l'équation de Newton selon la direction verticale $\vec{e}_z$, la composante de la force élastique est positive :

$$-k\vec{d}_{\text{équilibre}} = +k d_{\text{équilibre}} \vec{e}_z \quad \text{où } d_{\text{équilibre}} = ||\vec{d}_{\text{équilibre}}||\,.$$

Il vient

$$-Mg + k d_{\text{équilibre}} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_{\text{équilibre}} = \frac{Mg}{k}\,,$$

d'où la longueur du ressort à l'équilibre $\ell = \ell_0 - d_{\text{équilibre}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$.