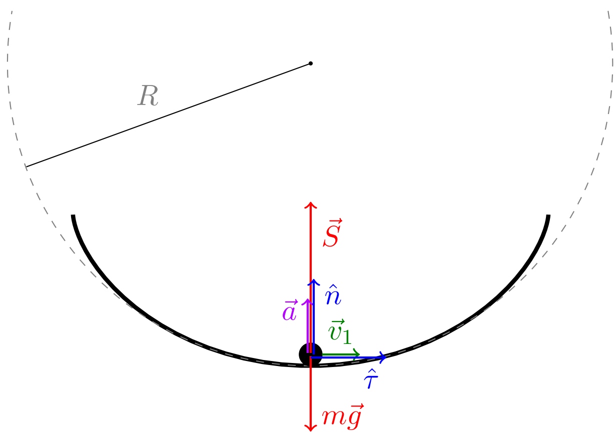
Corrigé Préparatoire 4 : Coordonnées cylindriques et sphériques

1. **Accélération normale**
   En l'absence de tout frottement, la bille subit deux forces lors de son déplacement sur le rail : la force de gravitation, $m\vec{g}$, et la force $\vec{S}$ de soutien du rail. La deuxième loi de Newton s'écrit ainsi

   $$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{S} = m\vec{a}\,.$$

   Durant le mouvement de la bille, la force de gravitation est toujours verticale (le vecteur $\vec{g}$ est toujours vertical), alors que la force de soutien du rail est toujours perpendiculaire au rail. Au point le plus bas, les deux forces sont donc perpendiculaires à la trajectoire :

   A cet endroit, le vecteur accélération est donc lui aussi vertical (perpendiculaire à la trajectoire) et l'équation de Newton projetée selon le vecteur $\hat{n}$ permet d'obtenir l'expression de la norme de la force de soutien :

   $$-mg + S = ma = ma_n \quad \Rightarrow \quad S = mg + ma_n = mg + m\frac{v_1^2}{R} = m(g + \frac{v_1^2}{R})\,,$$

   où $v_1 = ||\vec{v}_1||$.

2. **Vinyle**
   Un point du bord du disque tournant à une vitesse angulaire constante ω a une accélération radiale $a_r = r\omega^2$, où r est le rayon du disque. Son accélération tangentielle est nulle.
   Si la vitesse angulaire augmente de façon uniforme, un point du bord a une accélération à la fois radiale et tangentielle, notées a_r et a_t respectivement. Puisque la vitesse angulaire augmente uniformément, l'accélération angulaire α est constante et on a :

   $$\omega(t) = \alpha t + \omega_0\,, \tag{1}$$

   où ω_0 est la vitesse angulaire initiale. Dans ce cas, les normes des accélérations radiale et tangentielle sont :

   $$a_r(t) = r\omega^2(t) = r(\alpha t + \omega_0)^2\,, \tag{2}$$

   et

   $$a_t = r\alpha, \tag{3}$$

où a_r et a_t sont les normes des composantes radiale, ρ, et azimutale, ϕ, de l'accélération exprimée dans un repère en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_\rho + r\alpha\hat{e}_\phi$, où l'on a tenu compte des contraintes $\rho = r =$ constante, $z = 0 =$ constante.
Ces deux normes ne peuvent être égales qu'à un certain instant satisfaisant à :

$$\omega(t) = \sqrt{\alpha}\,, \tag{4}$$

c'est-à-dire :

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\omega_0}{\alpha}. \tag{5}$$

Cette solution existe seulement si $t \geq 0$ donc si $\sqrt{\alpha} \geq \omega_0$, autrement dit si la vitesse angulaire initiale ne dépasse pas la racine de l'accélération angulaire.

3. **Changement de repère et systèmes de coordonnées**

(a) Dans le repère $Oxyz$, notre vecteur s'écrit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{Oxyz} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}\,.$$

Comme il a été vu au cours, la composante d'un vecteur $\vec{a}$ selon un axe u se trouve en utilisant le produit scalaire entre $\vec{a}$ et le vecteur unitaire

$$\hat{u}:\; a_u = (\vec{a}\cdot\hat{u})\hat{u}\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Ox' vaut :

$$v_1' = \vec{v}\cdot\hat{x}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{x}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{x}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{x}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{x}')\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oy' vaut :

$$v_2' = \vec{v}\cdot\hat{y}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{y}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{y}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{y}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{y}')\,.$$

La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oz' vaut :

$$v_3' = \vec{v}\cdot\hat{z}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z})\cdot\hat{z}' = v_1(\hat{x}\cdot\hat{z}') + v_2(\hat{y}\cdot\hat{z}') + v_3(\hat{z}\cdot\hat{z}')\,.$$

Calculons $\hat{x}\cdot\hat{x}'$: on utilise la définition du produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$ où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Dans notre cas, l'angle entre $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ vaut θ (voir les deux figures ci-dessous). Les vecteurs unitaires étant par définition de norme 1, le produit scalaire s'écrit

$$\hat{x}\cdot\hat{x}' = \cos\theta\,.$$

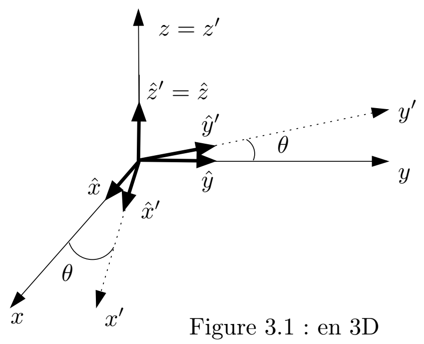


Figure 3.1 : en 3D

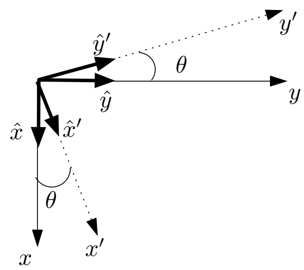


Figure 3.2 : en 2D, dans le plan Oxy

De la même manière, on trouve

$$\hat{y} \cdot \hat{y}' = \cos\theta \ , \ \ \hat{x} \cdot \hat{y}' = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta \ \text{ et } \ \hat{y} \cdot \hat{x}' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \, .$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Le vecteur $\hat{z} = \hat{z}'$ est orthogonal à $\hat{x}$, $\hat{x}'$, $\hat{y}$ et $\hat{y}'$. Tous les autres produits scalaires sont donc nuls, sauf le terme $\hat{z} \cdot \hat{z}'$ qui vaut 1. Dans le repère $Ox'y'z'$, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta \\ -v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

(b) La projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées cylindriques (voir figure ci-dessous) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \\ \rho \sin\phi \\ z \end{pmatrix} ,$$

où $\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$.

La projection du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées sphériques (voir figure ci-dessous) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

où l'on a introduit dans les coordonnées précédentes l'expression de la longueur ρ : $\rho = r \sin\theta$.

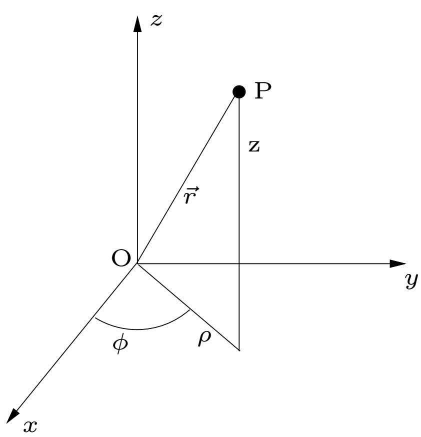


Figure 3.3

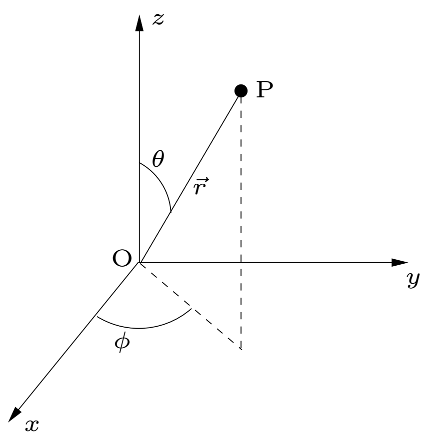


Figure 3.4