Corrigé Préparatoire 3 : Cinématique

1. **Vecteur position, vitesse et accélération**

   On raisonne à partir des définitions des vecteurs position, vitesse et accélération. Le vecteur position indique la position de l'objet à partir de l'origine choisie. Le vecteur vitesse (dérivée du vecteur position par rapport au temps) indique le sens du mouvement et sa norme est la valeur absolue de la vitesse scalaire. Elle est tangente à la trajectoire. L'accélération (dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps) peut avoir des composantes tangentielle et normale. Elle est toujours dirigée vers « l'intérieur » du virage.

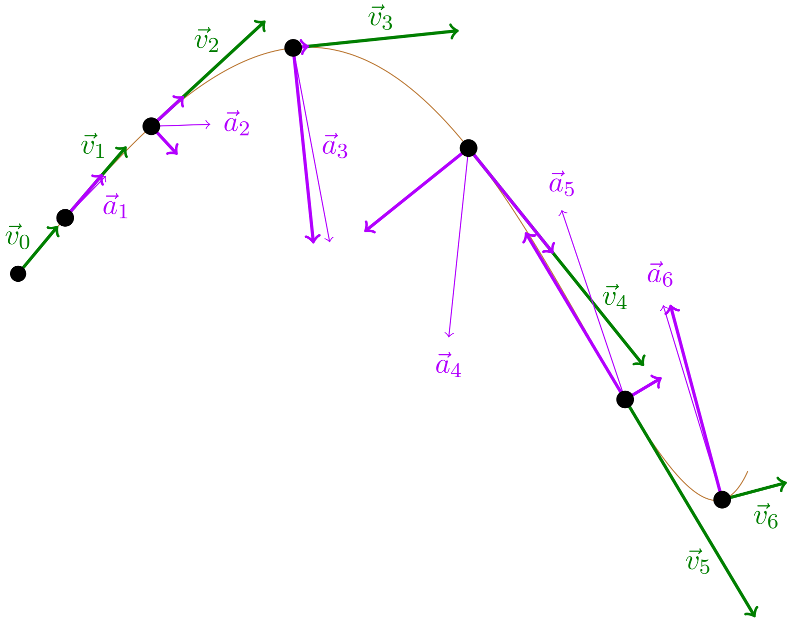
   Ainsi, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas réalistes :

   - La vitesse $\vec{v}$ doit être tangente à la trajectoire ;
   - l'accélération $\vec{a}_1$ doit être dirigée vers « l'intérieur » du virage ;
   - la vitesse $\vec{v}_2$ doit être tangente à la trajectoire.

2. **Vecteurs vitesse et accélération**

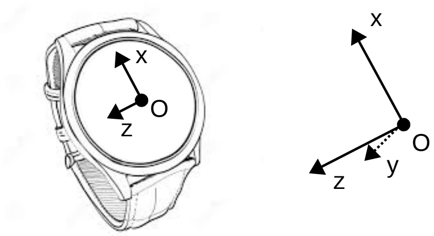
   Pour visualiser les vecteurs vitesse et accélération, il faut imaginer le mouvement de l'objet :

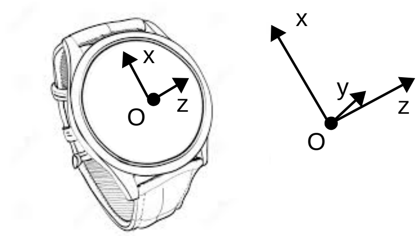
   - On peut comparer les normes des différents vecteurs vitesse en se basant sur les distances parcourues en une seconde par l'objet. On en déduit par exemple que la norme de la vitesse est plus grande à l'instant $t = 4\,\text{s}$ qu'à l'instant $t = 6\,\text{s}$.
   - Les changements dans la norme de la vitesse permettent d'approximer la composante de l'accélération tangente à la trajectoire. On obtient ainsi par exemple que l'accélération tangentielle doit être dirigée vers l'arrière à l'instant $t = 5\,\text{s}$.
     La composante de l'accélération normale à la trajectoire est absente (lorsque l'objet se déplace en ligne droite) ou dirigée vers l'intérieur du virage.
     Le vecteur accélération est la somme des vecteurs accélérations tangentielle et normale : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$.



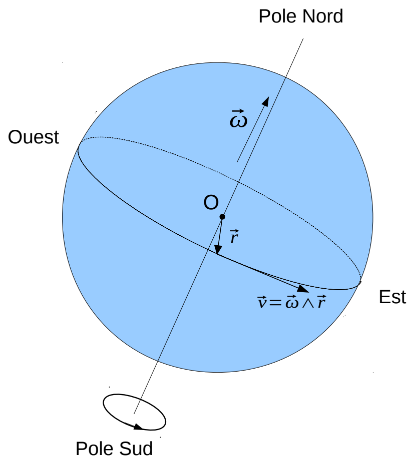
3. **Produit vectoriel et repères directs**

   a) Pour former un repère orthonormé droit $Oxyz$ avec les axes x et z, l'axe y doit être perpendiculaire aux deux axes x et z. Il est donc perpendiculaire au plan du cadran de la montre. A 9h, l'axe y est dirigé vers l'arrière de la montre, alors qu'à 15h il est dirigé vers l'avant de la montre. On peut déterminer cela en utilisant la règle de la main droite.



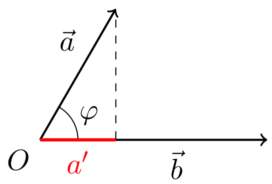


b) Puisque le soleil apparait à l'est et se couche à l'ouest, la terre tourne d'ouest en est (cf. $\vec{v}$ sur le schéma). Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est défini tel que : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. La direction de $\vec{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation de la terre, et son sens le sens de rotation de la terre. En utilisant la règle de la main droite, on obtient un vecteur de vitesse angulaire dirigé du pôle sud au pôle nord.



4. **Produit scalaire**

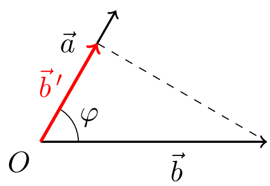
(a)



Par trigonométrie, la longueur cherchée est

$$a' = ||\vec{a}||\,|\cos\varphi| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{||\vec{b}||}\,.$$

(b)

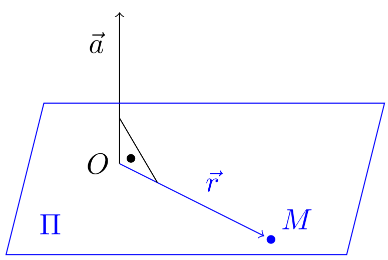


Le vecteur cherché est la projection algébrique (avec signe) multipliant le vecteur unitaire parallèle et de même sens que $\vec{a}$

$$\vec{b}\,' = ||\vec{b}||\cos\varphi\,\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||^2}\,\vec{a}\,.$$

Remarque : $\vec{b}\,'$ et $\vec{a}$ sont opposés si $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos\varphi < 0\,.$

(c)



Condition d'orthogonalité : $\vec{r}\cdot\vec{a} = 0\,.$

5. **Produit vectoriel**

(a) Par définition du produit vectoriel, l'aire est la norme $||\vec{a} \times \vec{b}||$.

(b) L'aire d'un parallélogramme étant « base fois hauteur », $h = \frac{||\vec{a}\times\vec{b}||}{||\vec{b}||}$.