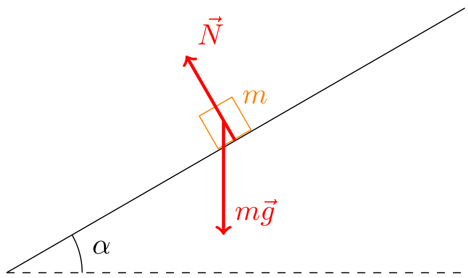
Corrigé 2 : Mouvements uniformément accélérés

1. **Blocs en mouvement**
   La figure nous indique que les positions successives des deux blocs, à des intervalles de temps réguliers, sont séparées par une même distance. On en déduit que la vitesse de chaque bloc est constante et donc que leur accélération est nulle.
2. **Vaisseau spatial**
   Soit x un axe parallèle à PQ et y un axe perpendiculaire à PQ, dans la direction de l'accélération durant la deuxième phase du mouvement. La composante x de la vitesse du vaisseau, v_x, doit rester constante, car il n'y a jamais d'accélération selon x. Les trajectoires 1 et 2, qui correspondent à une vitesse v_x qui s'annule tout à coup au point Q, ne sont donc pas possibles. Après le point Q, la trajectoire doit correspondre à celle d'un mouvement uniformément accéléré, c'est-à-dire à une parabole. Les trajectoires 2, 3, et 4 ne sont manifestement pas paraboliques. La seule possiblité est donc la trajetoire 5, qui est parabolique dès le point Q et compatible avec une vitesse v_x constante.
3. **Mouvement unidimensionnel**
   Equation de Newton pour $t > 0$: $\vec{f} = m\vec{a}$. Selon $\vec{e}_x$: $-f_0 = ma \Longleftrightarrow a = -\dfrac{f_0}{m}$.

   C'est un mouvement uniformément accéléré. Avec les conditions initiales $v(0) = v_0$ (la vitesse est v_0 à l'instant où le freinage commence) et $x(0) = 0$ (la position nulle à l'instant où le freinage commence),

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{f_0}{m}t + v_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} v_0 t & \text{si } t < 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_0}{m}t^2 + v_0 t & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

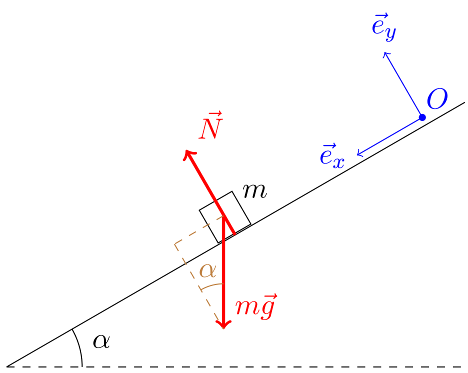
   Remarque : ce modèle de force de freinage atteint sa limite de validité au plus tard lorsque l'objet s'arrête !
4. **Mouvement 2D et projections**
   Dessin, choix de l'objet et détermination des forces extérieures



   Dans cet exercice, l'objet considéré est la masse m qui se trouve sur un plan incliné dont l'angle sera noté α. La masse est soumise à deux forces extérieures : son poids $m\vec{g}$ et le soutien $\vec{N}$ du plan incliné.
   Loi de la dynamique (deuxième loi de Newton)

$$\underbrace{\vec{F}}_{=m\vec{g}+\vec{N}} = m\vec{a}\,,$$

   où $\vec{F}$ représente la somme des forces extérieures.
   Choix du repère et mise en place des projections



On choisit par exemple un repère dont les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ sont parallèles au plan incliné et l'axe $\vec{e}_y$ perpendiculaire. L'axe $\vec{e}_z$ est perpendiculaire au plan de la feuille : $\otimes\,\vec{e}_z$. Pour simplifier, l'origine O est placée à l'endroit du lâcher.

Projections de la 2ème loi de Newton

La masse est supposée être lâchée. Elle ne possède donc pas de vitesse initiale.

Selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, la masse est immobile, alors qu'elle est uniformément accélérée selon $\vec{e}_x$. En effet,

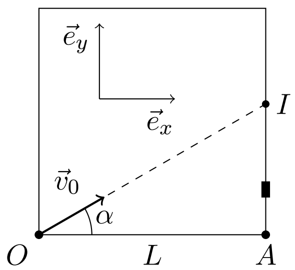
- Selon $\vec{e}_y$:
$$\underbrace{F_y}_{=-mg\cos\alpha+N} = ma_y = 0\,.$$
Il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_y$: $a_y(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad v_y(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad y(t) = 0\ \forall t\,.$
- Selon $\vec{e}_z$:
$$\underbrace{F_z}_{=0} = ma_z \quad\Rightarrow\quad a_z(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad v_z(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad z(t) = 0\ \forall t\,.$$
- Selon $\vec{e}_x$:
$$\underbrace{F_x}_{=mg\sin\alpha} = ma_x \quad\Rightarrow\quad a_x(t) = g\sin\alpha = \text{constante}\ \forall t\,.$$
L'accélération étant constante, les équations horaires s'écrivent
$$\begin{aligned} a_x(t) &= g\sin\alpha\,,\\ v_x(t) &= g\sin\alpha\, t\,,\\ x(t) &= \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2\,. \end{aligned}$$

5. **Rencontre de deux objets**

Critère de rencontre

Notons $\vec{r}_b(t)$ et $\vec{r}_p(t)$ les positions respectives de la bille et de la paroi mobile à l'instant t par rapport à l'origine choisie en O. Il y a rencontre entre ces deux objets si et seulement si
$$\exists\, t_r \quad \text{t.q.} \quad \vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r)\,,$$
c'est-à-dire ssi il existe un instant auquel les positions (vectorielles !) coïncident.

Dessin, choix du repère



Le point de rencontre I est donné par $I(L, y_I)$, avec $y_I = L\tan\alpha\,.$

Equation horaire de la bille

La bille est en mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse $\vec{v}_0$ et part de O à l'instant $t = 0$:
$$\vec{r}_b(t) = \vec{v}_0\, t\,.$$

Equation horaire de la paroi mobile

La paroi mobile est en mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse $\vec{v}_p$ et si on suppose qu'elle part de A à l'instant t_{p0}, on peut écrire
$$\vec{r}_p(t) = \vec{v}_p\,(t - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}$$
avec $\vec{r}_{p0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que les deux équations horaires sont écrites par rapport à la même origine. On se place ici dans le plan de la table (vecteurs à deux dimensions).

Projections de l'équation vectorielle traduisant la rencontre
La bille et la paroi mobile doivent se trouver au même endroit à un instant t_r donné. On cherche donc à déterminer l'existence de t_r tel que

$$\vec{r}_b(t_r) = \vec{r}_p(t_r) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_0\, t_r = \vec{v}_p\, (t_r - t_{p0}) + \vec{r}_{p0}\, .$$

Selon $\vec{e}_x$:

$$v_0 \cos\alpha\, t_r = L$$

Selon $\vec{e}_y$:

$$v_0 \sin\alpha\, t_r = v_0\, (t_r - t_{p0})\, .$$

La rencontre doit avoir lieu dans toutes les composantes et les deux relations doivent être vérifiées simultanément. En injectant l'expression de t_r obtenue grâce à la première équation,

$$t_r = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}\, ,$$

dans la seconde, on obtient alors finalement

$$t_{p0} = (1 - \sin\alpha)\, t_r = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{L}{v_0}\, .$$