Corrigé 03 : Cinématique

1 Accélération dans un virage

a) Selon l'abscisse curviligne, la distance parcourue sur un quart de cercle est $D = \pi R/2$, et l'accélération a_t sur cette distance est constante, En tenant compte de la vitesse initiale nulle, et en choisissant l'origine de l'abscisse curviligne s au point de départ du véhicule, l'équation horaire est

$$s(t) = \frac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2 \,. \tag{1}$$

On en déduit que l'accélération tangentielle vaut

$$a_\mathrm{t} = 2\frac{D}{T^2} = \frac{\pi R}{T^2} \,. \tag{2}$$

b) L'évolution temporelle de la vitesse est

$$v(t) = a_\mathrm{t} t \,, \tag{3}$$

d'où l'on trouve que après un quart de tour, la vitesse vaut

$$v(T) = a_\mathrm{t} T = \frac{\pi R}{T} \,. \tag{4}$$

c) L'accélération normale est égale au rapport du carré de la vitesse et du rayon du cercle. Donc après un quart de tour

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2(T)}{R} = \frac{\pi^2 R}{T^2} \,. \tag{5}$$

d) L'évolution temporelle de l'accélération normale est

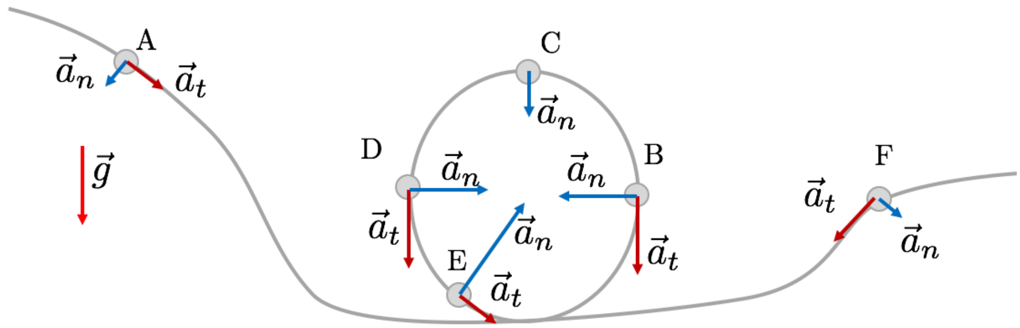
$$a_\mathrm{n}(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{a_\mathrm{t}^2 t^2}{R} \,. \tag{6}$$

Pour que cette expression soit égale à l'accélération tangentielle, il faut que

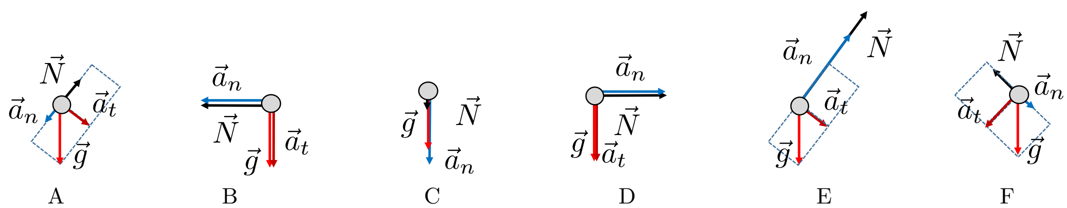
$$a_\mathrm{n}(t_\mathrm{eq}) = \frac{a_\mathrm{t}^2 t_\mathrm{eq}^2}{R} = a_\mathrm{t} \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{eq}^2 = \frac{R}{a_\mathrm{t}} = \frac{T^2}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{eq} = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \tag{7}$$

2 Roller Coaster

1. La figure ci-dessous donne les vecteurs accélérations normales $\vec{a}_n$ et tangentielles $\vec{a}_t$ du wagonnet allant de A à F lorsque la trajectoire est dans un plan vertical.



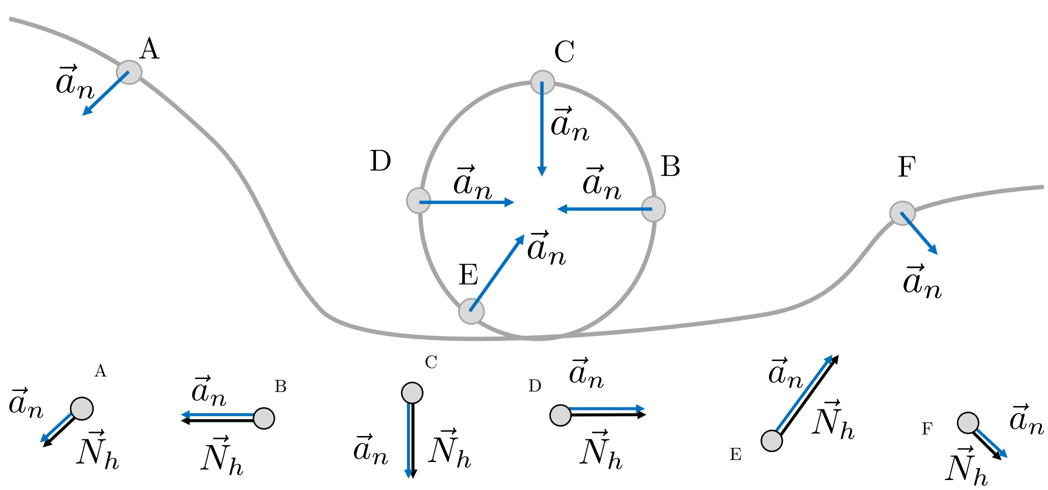
La figure suivante permet d'analyser la situation point par point. Le vecteur $\vec{N}$ représente la force liée à la contrainte géométrique et $\vec{g}$ est l'accélération due à l'attraction terrestre. On a considéré une masse m unité. Le rectangle qui apparaît pour certains points correspond à la décomposition du vecteur $\vec{g}$ en ses composantes normales et tangentielles au mouvement.



Le wagonnet subit deux forces : son poids $m\vec{g}$ et la force de liaison $\vec{N}$, donc $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, c'est-à-dire $\vec{a} = \vec{g} + \vec{N}/m$.

Rappelons que $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ sont les composantes de $\vec{a}$ parallèle et perpendiculaire à la vitesse ; et aussi que $\vec{a}_n$ est dirigé vers le centre de courbure avec une norme égale à v^2/R et que $\vec{a}_t = dv/dt\ \vec{v}/v$, où v est la norme de la vitesse.

2. Lorsque le wagonnet se déplace de F à A les accélérations sont identiques à celles qui caractérisent son déplacement de A à F (pour autant que la vitesse initiale du mouvement de F à A soit un vecteur opposé à la vitesse finale du mouvement de A à F).
3. Dans le cas d'une piste se trouvant dans un plan horizontal, l'accélération tangentielle est nulle car $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont tous deux perpendiculaires à la piste. C'est la composante horizontale N_h de $\vec{N}$ qui cause l'accélération normale (voir les figures ci-dessous). La norme de la vitesse est constante, et donc a_n a une norme inversement proportionnelle au rayon de courbure ; ceci explique pourquoi la norme de a_n est la même aux points B, C, D et E.



3 Trajectoire elliptique

a) Le vecteur position du point matériel est

$$\vec{r}(t) = C_1 \cos(\omega t)\hat{e}_x + C_2 \sin(\omega t)\hat{e}_y. \tag{8}$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et de demi-axes C_1 et C_2 selon les directions x et y centrée sur l'origine O. En effet, les coordonnées x et y du vecteur $\vec{r}$ satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_2^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes C_1 et C_2. L'équation (8) représente l'équation horaire d'un point matériel se déplaçant sur cette ellipse. Le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega C_1 \sin(\omega t)\hat{e}_x + \omega C_2 \cos(\omega t)\hat{e}_y.$$

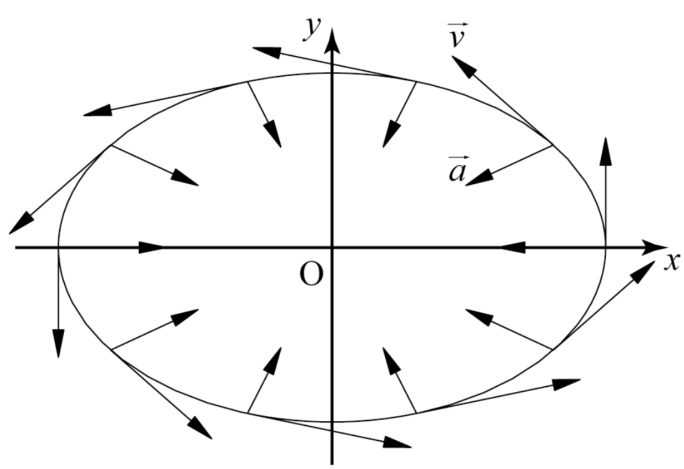
Il est toujours tangent à la trajectoire (c'est-à-dire à l'ellipse).
Le vecteur accélération est donné par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 C_1 \cos(\omega t)\hat{e}_x - \omega^2 C_2 \sin(\omega t)\hat{e}_y. \tag{9}$$

Ce dernier peut se ré-écrire

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Il s'agit d'un vecteur colinéaire à $\vec{r}(t)$, dirigé dans le sens opposé. Il pointe donc vers l'origine O du repère. (Voir schéma).



Pour montrer que $\vec{r}(t)$ n'est en général pas orthogonal à $\vec{v}(t)$, on calcule leur produit scalaire :

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = -C_1^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) + C_2^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) = (C_2^2 - C_1^2)\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t).$$

Cette expression n'est pas nulle si $C_1 \neq C_2$ (sauf dans les cas particuliers $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), et donc les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ ne sont en général pas orthogonaux.

b) Pour écrire la force qui détermine ce mouvement, on utilise la loi de Newton

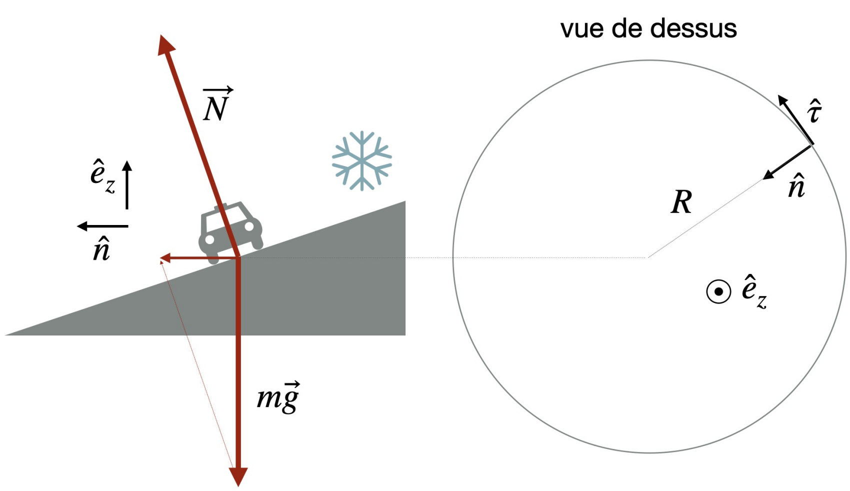
$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t) \tag{10}$$

c) D'après l'équation (10), cette force est proportionelle à la distance à l'origine $|\vec{r}(t)|$, parallèle au vecteur $\vec{r}(t)$ et de sens opposé. Il s'agit d'une force de rappel, telle celle produite par un ressort de longueur au repos nulle dont une extremité est fixée à l'origine et l'autre sur le point matériel, comme nous le verrons en détail en semaine 4. La force gravitationnelle est, elle, inversément proportionelle au carré de la distance. Il est à noter que les deux forces produisent un mouvement elliptique. Dans cet exercice, la force est dirigée vers le centre de l'ellipse. Dans le cas de la gravitation (mouvement des planètes, par exemple), il sera vu que la force est dirigée vers l'un des foyers de l'ellipse.

4 Virage relevé verglacé

a) On considère le mouvement d'un point matériel de masse m représentant le centre de masse de la voiture. Le référentiel est lié au sol, il est galiléen pour cette situation. Il faut tout d'abord identifier deux caractéristiques essentielles :
— Puisque la route est verglacée, la seule force de contact entre la route et la voiture est la force de liaison $\vec{N}$ normale à la chaussée.
— Lorsque la hauteur de la voiture ne change pas, le mouvement est circulaire uniforme (vitesse constante v_0) dans un plan horizontal (et donc pas parallèle à la chaussée)

Nous pouvons alors faire le schéma ci-dessous représentant notamment le bilan des forces ($\vec{N}$ et $m\vec{g}$) et 3 vecteurs unitaires formant une base orthonormée $(\hat{\tau}, \hat{n}, \hat{e}_z)$:



On projette d'abord le PFD, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, sur le vecteur unitaire normal $\hat{n}$:

$$m\vec{a} \cdot \hat{n} = m\vec{g} \cdot \hat{n} + \vec{N} \cdot \hat{n} \tag{11}$$

$$\Longrightarrow \quad m\frac{v_0^2}{R} = N \sin\alpha \tag{12}$$

En projetant d'autre part sur $\hat{e}_z$:

$$m\vec{a} \cdot \hat{e}_z = m\vec{g} \cdot \hat{e}_z + \vec{N} \cdot \hat{e}_z \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = -mg + N\cos\alpha \tag{14}$$

Si l'on divise l'équation (12) par (14) afin d'élimer la force inconnue $\vec{N}$ on obtient

$$\frac{v_0^2}{R\,g} = \tan\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad |v_0| = \sqrt{R\,g\,\tan\alpha}$$

On peut vérifier la cohérence dimensionnelle de ce résultat. Par ailleurs, on vérifie bien que la vitesse à laquelle le véhicule doit aborder la courbe est d'autant plus grande que R est grand et que l'angle α est grand. Si α tend vers $\pi/2$ (cylindre aux murs verticaux) ou R tend vers l'infini (ligne droite en dévers), v_0 tend vers l'infini, c'est à dire qu'à n'importe quelle vitesse finie le véhicule glissera vers le bas du virage.

b) Le cas d'un glissement sans frottement le long d'un plan incliné a été traité dans la série préparatoire 02. On trouvait dans ce cas que la norme de la force $\vec{N}$ s'exerçant sur l'objet valait $|\vec{N}| = mg\cos\alpha$. Ici, l'équation (14) implique que $|\vec{N}| = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Puisque $\cos\alpha \leq 1$, cette force est toujours plus grande que la précédente, voire beaucoup plus grande lorsque $\alpha \to \pi/2$