Série 5

Exercice 1. Volume d'une pyramide tronquée. On considère une pyramide de base triangulaire ΔABC situé dans le plan horizontal Oxy. On considère encore un plan $\mathcal{A}$ parallèle à Oxy coupant la pyramide en un triangle $\Delta A'B'C'$. Notre sujet d'étude est la pyramide tronquée formée des points de la pyramide situé entre les triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$. Soit H la hauteur de la pyramide de base ΔABC et h la hauteur de la pyramide tronquée ; en d'autres termes h est la distance entre le plan Oxy et le plan parallèle $\mathcal{A}$.

a) Explique pourquoi la pyramide de base $\Delta A'B'C'$ est semblable à la pyramide de base ΔABC. La hauteur de cette pyramide plus petite vaut $H - h$.

b) Considérons une homothétie de centre S qui transforme la grande pyramide en la petite. Appelons λ son rapport. Explique pourquoi λ est un nombre réel compris entre 0 et 1. Exprime la hauteur de la petite pyramide en fonction de λ et de H. Exprime aussi l'aire de la base de la petite pyramide $\sigma' = \sigma(\Delta A'B'C')$ en fonction de λ et de l'aire $\sigma = \sigma(\Delta ABC)$.

c) Montre que le volume de la pyramide tronquée vaut $\frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2) \cdot \sigma \cdot h$.

d) En utilisant l'expression trouvée pour $\sigma(\Delta A'B'C')$ en **b)**, montre que

$$\lambda \cdot \sigma = \sqrt{\sigma \cdot \sigma'}.$$

e) Montre que le volume de la pyramide tronquée vaut

$$\frac{1}{3} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma \cdot \sigma'} + \sigma') \cdot h.$$

f) Par passage à la limite, montre que le volume d'un cône tronqué de hauteur h dont les bases sont des cercles de rayon r et R vaut

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^2 + rR + R^2) \cdot h.$$

g) Calcule les volumes d'une pyramide P de base carrée de côté 2 et de hauteur 1, d'une pyramide P' de base carrée de côté 1 et de hauteur 1, et d'une d'une pyramide tronquée T de bases carrées de côté 2 et 1 respectivement et de hauteur 1. Compare la somme des volumes des pyramides

$$\text{vol}(P) + \text{vol}(P')$$

avec le volume $\text{vol}(T)$ de la pyramide tronquée. Dans le plan, l'aire du "triangle tronqué", c'est-à-dire du trapèze, est égal à la somme des aires des triangles de mêmes bases et de même hauteur ; obtient-on une expression similaire avec les pyramides ?

Exercice 2. Montre que $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication, mais qu'il n'est pas un corps.

Exercice 3. Développe les expressions $(x+1)^n$ pour chaque $n = 1, 2, 3, 4$.
Peux-tu en déduire une méthode permettant de trouver le résultat du développement de $(x+1)^{10}$?

Exercice 4. Développe les expressions suivantes (le grand π dans la seconde expression signifie que l'on prend le *produit* pour k allant de 1 à 4 de tous les $(x+1)^k$) :

a) $\frac{x^2-1}{2}[(x+1)^2 + (x-1)^2]$

b) $\prod_{k=1}^{4}(x+1)^k$