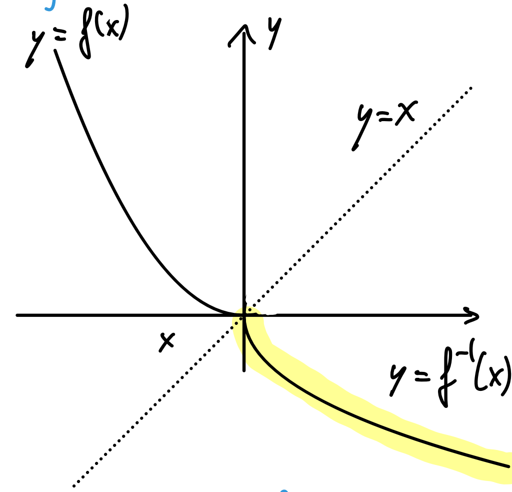
Exemple : $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ $= \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq 0\}$



f est bijective et

$f^{-1} : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_- \\ y \mapsto -\sqrt{y} \end{array}$

fin cours 12/09

Def (composition de fonctions). Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions, La composition de f par g (aussi appellé "f suivie de g"), notée $g \circ f$ est la fonction :

$$g \circ f : \begin{array}{|l} X \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

Compositions multiples :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

Manifestement, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$

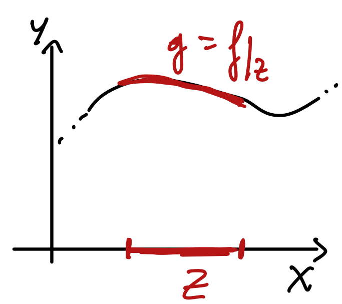
$\rightsquigarrow$ on peut enlever les parenthèses sans ambiguïté : on dit que la composition est <u>associative</u>.

Restriction et prolongement de fonctions :

Soit $f : X \to Y$ et $g : Z \to Y$ avec $Z \subset X$

Si $\forall x \in Z$, on a $g(x) = f(x)$, on dit que :

- g <u>la</u> restriction de f à Z, on note $f|_Z$
- f <u>un</u> prolongement de g à X.



0.2 Nombres entiers et rationnels

Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

"privé de" "sans"

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

Tout rationnel s'écrit de manière unique sous forme irréductible :

$$x = \frac{p}{q} \text{ avec } \begin{cases} q \in \mathbb{N}^* \\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \end{cases}$$

(pas de diviseur commun plus grand que 1)

Aparté : construction de $\mathbb{Q}$:

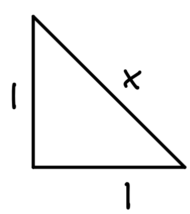
Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on note $(p, q) \equiv \frac{p}{q}$. On a la relation d'équivalence $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ ssi $a \cdot d = b \cdot c$ (vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence).

On peut construire $\mathbb{Q}$ comme étant $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$. Définition des opérations :

- Addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b \cdot d}$
- Multiplication : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

vérifier que ces définitions sont compatibles avec la relation d'équivalence.

Problème :



Par Thm. de Pythagore $x^2 = 2$

Thm : Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $x^2 \neq 2$.

Preuve : • Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors : $\begin{cases} n \text{ est pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair} \\ n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair} \end{cases}$

On peut déduire que si n^2 est pair alors n est pair.

- Par l'absurde, supposons que $\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^2 = 2$.

Soit $x = \frac{p}{q}$ sa forme irréductible (en particulier, p et q premiers entre eux)

On a $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \iff p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow p^2$ est pair

$\Rightarrow p$ est pair

$\Rightarrow p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Il s'ensuit $(2k)^2 = 2q^2 \iff 4k^2 = 2q^2$

$\Rightarrow 2k^2 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ est pair

$\Rightarrow q$ est pair

On a p et q pairs mais on a supposé p et q premiers entre eux

$\Rightarrow$ contradiction.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$ ∎

0.3 Logique et techniques de preuve

"Proposition" : affirmation qui est soit vraie (V) soit fausse (F).

- "$2 + 4 = 10$" : Faux
- "$\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^2 = 2$" : Faux

  ↖ "tel que"
- "Cette phrase est fausse" : pas une proposition (variable pas définie, grammaire, auto-référence, ...)

Soit A et B des propositions :

(A et B) : vraie ssi A est vraie et B est vraie

(A ou B) : vraie ssi A est vraie et/ou B est vraie

non(A) : vraie ssi A est fausse
(parfois notée ¬A)

Table de vérité :

A	B	A et B	A ou B	non(A)
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Exemple : Non("Tous les moutons sont blancs")

= "Il existe (au moins) un mouton qui n'est pas blanc"

- Ordre des quantificateurs "$\exists$" et "$\forall$" est important :

"Tout le monde aime une boisson" → par exemple, tout le monde aime l'eau (i)
→ par exemple, moi j'aime le jus de citron. (ii)

Désambiguïsation :

(i) $\exists$ B une boisson, $\forall$ personne P, P aime B.

(ii) $\forall$ personne P, $\exists$ B une boisson, P aime B.

- Exercice de négation :

non(i) : $\forall$ boisson B, $\exists$ personne P, P n'aime pas B.

non(ii) : $\exists$ personne P, $\forall$ boisson B, P n'aime pas B.

Implication et équivalence :

Soient A et B deux propositions :

$A \Rightarrow B$: signifie "A implique B", "si A alors B".

$A \Leftrightarrow B$: signifie "A est équivalent à B".

Table de vérité :

A	B	A ⇒ B	A ⇔ B
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

<u>Exemple :</u> A : " Julie est sous son parapluie "
B : " Il pleut "

(∗) $A \Rightarrow B$: si Julie est sous son parapluie alors il pleut.
("⇒" est différent de la notion de causalité).

0.3.2 Techniques de preuves

(i) <u>Par l'absurde :</u> pour montrer A, on montre non(A) ⇒ Faux
vérifier A ⇔ [non(A) ⇒ Faux] à l'aide d'une table de vérité

(ii) <u>Par contraposée :</u> pour montrer $A \Rightarrow B$ on montre non(B) ⇒ non(A)
vérifier [A ⇒ B] ⇔ [non(B) ⇒ non(A)] (table de vérité).

Contraposée de (∗) :
" S'il ne pleut pas alors Julie n'est pas sous son parapluie ".

fin 19/09