

Partie I : Ensembles

Exercice 1.

On considère les ensembles $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Déterminer

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B).$$

Solution.

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|--|
| $i) A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},$ | $iv) B \setminus A = \{2, 4\},$ | $vii) X \setminus (A \cup B) = \{5\},$ |
| $ii) A \cap B = \{3\},$ | $v) X \setminus A = \{2, 4, 5\},$ | |
| $iii) A \setminus B = \{1\},$ | $vi) X \setminus B = \{1, 5\},$ | $viii) X \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5\}.$ |

Exercice 2.

Décrire les ensembles suivants sous la forme conditionnelle $X = \{\text{élément} \mid \text{condition}\}$, et sous la forme explicite $X = \{a, b, c, \dots\}$ (liste d'éléments avec $\dots$).

- a) L'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls.
- b) L'ensemble des nombres entiers pairs.
- c) L'ensemble des nombres entiers impairs positifs.
- d) L'ensemble des nombres entiers positifs divisibles par 3, sans 15.

Solution.

- a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{0, -1, -2, \dots\}.$
- b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ est pair}\}, \text{ ou mieux } \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}.$
- c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair}\}, \text{ ou mieux } \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \dots\}.$
- d) $\{3n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \neq 5\} = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, \dots\}.$

Partie II : Preuves directes et par contraposée

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ecrire la négation des propositions suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- b) $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \implies x \leq 0)$

Solution.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
- b) $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M.$
- c) $\exists x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \text{ et } x > 0).$

Exercice 4.

Démontrer les propositions suivantes avec une preuve directe.

- a) La somme de deux nombres entiers impairs est toujours un nombre pair.
- b) Le produit de deux nombres entiers impairs est toujours un nombre impair.

Solution.

- a) Soient deux entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ et $n_1 = 2k_1 + 1$, $n_2 = 2k_2 + 1$ qui sont impairs par construction.
Alors

$$n_1 + n_2 = (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) = 2k_1 + 2k_2 + 2 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + 1)$$

qui est bien un multiple de 2, donc un nombre pair.

- b) Soient deux entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ et $n_1 = 2k_1 + 1$, $n_2 = 2k_2 + 1$ qui sont impairs par construction.
Alors

$$n_1 \cdot n_2 = (2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) = 4 \cdot k_1 \cdot k_2 + 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 1 = 2 \underbrace{(2 \cdot k_1 \cdot k_2 + k_1 + k_2)}_K + 1 = 2K + 1$$

avec $K \in \mathbb{Z}$, d'où $n_1 \cdot n_2$ est impair.

Exercice 5.

Démontrer les propositions suivantes par contraposée :

- a) Si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3.
- b) Si n^3 est pair, alors n est pair.

Solution.

- a) Montrons la contraposée : si n n'est pas un multiple de 3, alors n^2 n'est pas un multiple de 3.
Il y a deux cas à traiter. D'une part, si $n = 3k + 1$. Alors

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \underbrace{(3k^2 + 2k)}_K + 1 = 3K + 1$$

qui n'est pas un multiple de 3.

D'autre part, si $n = 3k + 2$, alors

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \underbrace{(3k^2 + 4k + 1)}_K + 1 = 3K + 1$$

qui n'est pas un multiple de 3.

- b) Montrons la contraposée : si n est impair, alors n^3 est impair.
Supposons que n est impair, alors $n = 2k + 1$, d'où

$$n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 6k^2 + 6k + 1 = 2 \underbrace{(4k^3 + 3k^2 + 3k)}_K + 1 = 2K + 1$$

qui est impair.

Partie II : Preuves par récurrence

Notations. Si $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ est une suite de nombres réels, alors on note **la somme des n premiers éléments de la suite** par

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Exercice 6.

Prouver par récurrence :

$$a) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$b) \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$d) \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2).$$

$$e) \text{ (Question d'examen) } \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}$$

Solution.

a) Cas $n = 1$: vrai, car d'une part $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$, d'autre part $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1$.
Supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

b) Cas $n = 1$: vrai, car d'une part $\sum_{k=1}^1 (-1)^{1-k} k^2 = 1$, d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 = - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 + (n+1)^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

c) Cas $n = 1$: vrai, car d'une part $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1$, d'autre part $\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2 = 1$.
Supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

d) En décalant l'indice pour commencer à $k = 1$,

$$S = \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2) = \sum_{k=1}^{1001} k(3k-1) = 3 \sum_{k=1}^{1001} k^2 - \sum_{k=1}^{1001} k$$

En utilisant la formule du point (a) et l'exemple vu en classe,

$$S = 3 \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 2003}{6} - \frac{1001 \cdot 1002}{2} = 1001 \cdot 1001 \cdot 1002 = 1'004'005'002.$$

e) Cas $n = 0$: vrai, car d'une part

$$\sum_{k=0}^0 \frac{k}{3^k} = 0,$$

d'autre part

$$\frac{3^{0+1} - 2 \cdot 0 - 3}{4 \cdot 3^0} = \frac{0}{4} = 0.$$

Supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors pour $n+1$, montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} = \frac{3^{n+2} - 2(n+1) - 3}{4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Nous calculons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{3^{n+2} - 6n - 9}{4 \cdot 3^{n+1}} + \frac{4n+4}{4 \cdot 3^{n+1}} \\ &= \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{4 \cdot 3^{n+1}}.\end{aligned}$$

Exercice 7.

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x \geq -1, n \geq 1$.

Solution.

Le cas $n=1$ est trivialement vrai, car

$$(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x.$$

Supposons que l'inégalité est vraie pour un certain $n \geq 1$. Nous pouvons écrire pour tout $x \geq -1$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Ceci montre que l'inégalité est vraie pour $n+1$. Ainsi, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

Partie III : Nombres rationnels et preuves par l'absurde

Exercice 8.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier avec une preuve si VRAI, ou avec un contre-exemple si FAUX.

- a) La somme de deux rationnels est rationnelle.
- b) La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
- c) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.
- d) Le produit de deux rationnels est rationnel.
- e) Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
- f) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.

Solution.

- a) VRAI.
En effet $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Cela est vrai pour la différence aussi.
- b) FAUX.
Par exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme est rationnelle.
- c) FAUX.
En effet si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors si $a+b \in \mathbb{Q}$ on aurait $b = (a+b) - a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

d) *VRAI.*

En effet $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$

e) *FAUX.*

Prendre par exemple $a = \sqrt{2} = b$ sont irrationnels, mais $ab = 2$ ne l'est pas.

f) *FAUX.*

Prendre par exemple $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 9.

Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Solution.

a) Le raisonnement est similaire à celui du cours. Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. On peut donc écrire $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$, qui est une fraction irréductible. En particulier, a et b ne sont pas les deux pairs. Alors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \implies a^3 = 2b^3 \implies a^3 \text{ est pair} \implies a \text{ est pair} \quad (\text{exercice 2.b}),$$

Il suit que $a = 2c$, pour un $c \in \mathbb{Z}$ et on trouve donc l'équation

$$(2c)^3 = 2b^3 \implies 8c^3 = 2b^3 \implies 4c^3 = b^3 \implies b^3 \text{ est pair} \implies b \text{ est pair}.$$

Ceci contredit l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$, donc on conclut que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) La preuve pour $\sqrt{3}$ est similaire. On suppose que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, et on écrit $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ qui est une fraction irréductible. En particulier, a et b ne sont pas les deux multiples de 3. Alors

$$3 = \frac{a^2}{b^2} \implies a^2 = 3b^2 \implies a^2 \text{ est multiple de 3} \implies a \text{ est multiple de 3} \quad (\text{exercice 2.a})$$

Il suit que $a = 3c$, pour un $c \in \mathbb{Z}$ et on trouve donc l'équation

$$\begin{aligned} (3c)^2 = 3b^2 &\implies 9c^2 = 3b^2 \implies 3c^2 = b^2 \implies b^2 \text{ est multiple de 3} \\ &\implies b \text{ est multiple de 3.} \end{aligned}$$

Ceci contredit l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$, donc on conclut que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.