

Exercice 1.

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

Solution. On a

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Le couple $(3, 2)$ n'est donc pas un élément de $X \times Y$.

Exercice 2.

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ non vides. On note $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et $A \cap B$ pour leur intersection. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$
- b) $A \times B = B \times A \iff A = B$
- c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Solution.

a) FAUX.

Il suffit de tester avec un contre-exemple simple : $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors d'une part,

$$\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R};$$

d'autre part

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \neq \mathbb{R}.$$

b) VRAI.

L'implication $(\Leftarrow)$ est triviale. Montrons $(\Rightarrow)$ par l'absurde : supposons $A \times B = B \times A$ et $A \neq B$. Sans perte de généralité, supposons qu'il existe $a \in A$ avec $a \notin B$. Prenons $b \in B$. Alors $(a, b) \in A \times B = B \times A$ implique $a \in B$, contradiction.

c) VRAI.

La preuve se fait par double-inclusion.

($\subset$) : Soit $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Alors $x \in A, y \in B, y \in C$. Donc $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$.

($\supset$) : Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Alors $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$. Donc $x \in A, y \in B, y \in C$, donc $(x, y) \in A \times (B \cap C)$.

Partie II : Fonctions

Exercice 3.

Soient $X = \{1, 2\}, Y = \{3, 4\}$.

- a) Trouver les graphes de toutes les fonctions de X vers Y .
- b) Déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives.
- c) Pour les fonctions bijectives, déterminer le graphe de leur réciproque.

Solution.

a) On a : $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Tous les graphes possibles sont

$$G_1 = \{(1, 3), (2, 3)\}, G_2 = \{(1, 3), (2, 4)\}, G_3 = \{(1, 4), (2, 3)\}, G_4 = \{(1, 4), (2, 4)\}.$$

Soit $f_i : X \rightarrow Y$, avec $i = 1, 2, 3, 4$ la fonction qui a comme graphe G_i . Par exemple $f_1(1) = 3$ et $f_1(2) = 3$.

b) Les fonctions f_2 et f_3 sont injectives et surjectives donc bijectives. Les fonctions f_1 et f_4 ne sont ni injectives ni surjectives.

c) Seules les fonctions f_2 et f_3 admettent une réciproque $f_i^{-1} : Y \rightarrow X$, avec leur graphe H_i :

$$H_2 = \{(3, 1), (4, 2)\}, \quad H_3 = \{(3, 2), (4, 1)\}.$$

Exercice 4.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Si $f \circ g = g \circ f$, alors $f = g$
- b) Si f, g injectives, alors $f \circ g$ injective.
- c) Si $f \circ f$ injective, alors f injective.
- d) Si $f \circ g$ injective, alors g injective.
- e) Si $f \circ g$ injective, alors f injective.
- f) Si $f \circ g$ surjective, alors f surjective.

Solution.

a) FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

b) VRAI.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme f est injective, on a $g(x_1) = g(x_2)$, et par l'injectivité de g , il suit que $x_1 = x_2$. Ainsi $f \circ g$ est bien injective

c) VRAI.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on a $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Comme $f \circ f$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.

d) VRAI.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc on a $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme $f \circ g$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc g est injective.

e) FAUX.

Prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$. Alors f n'est pas injective (sur $\mathbb{R}$), mais $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ est injective.

f) VRAI.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = y$. En posant $z = g(x)$, on a trouvé $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. Ainsi f est surjective.

Exercice 5.

Soient la fonction $f(x) = x^3$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer

- | | | |
|-------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $f([-1, 2])$ | c) $\text{Im}(f)$ | e) $f^{-1}(-1)$ |
| b) $f(\{-2, 4\})$ | d) $f^{-1}([-27, 125])$ | f) $f^{-1}(\{-1\})$ |

Solution.

Dans ce exercice, il ne faut pas confondre les intervalles (avec crochets) avec les ensembles finis (avec accolades).

a) $f([-1, 2]) = [-1, 8]$

b) $f(\{-2, 4\}) = \{-8, 64\}$

c) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

d) $f^{-1}([-27, 125]) = [-3, 5]$

e) $f^{-1}(-1) = -1$ (préimage de -1 par la réciproque de f)

f) $f^{-1}(\{-1\}) = \{-1\}$ (préimage du singleton $\{1\}$)

Exercice 6.

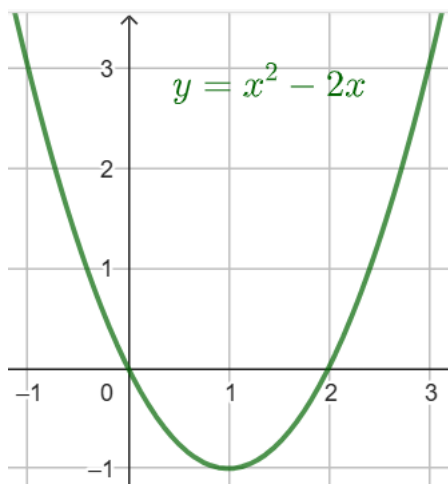
Déterminer des sous-ensembles $X, Y \subset \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : X \rightarrow Y, x \mapsto x^2 - 2x$ est...

a) ni injective, ni surjective

c) surjective, mais pas injective

b) injective, mais pas surjective

d) bijective

Solution.

En traçant le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 2x$, nous pouvons voir quels sont les ensembles X et Y pour laquelle la fonction n'est respectivement pas injective (X contient au moins deux valeurs symétriques par rapport à $x = 1$) et pas surjective (Y contient des valeurs inférieures à -1). Par exemple :

a) $X = Y = \mathbb{R}$

c) $X = \mathbb{R}$ et $Y = [-1, \infty[$

b) $X = [1, \infty[$ et $Y = \mathbb{R}$

d) $X = [1, \infty[$ et $Y = [-1, \infty[$

Exercice 7.

Prouver par récurrence :

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2},$

(d) Calculer $\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2).$

Solution.

(a) Cas $n = 1$: vrai.

Supposons vrai pour n , alors pour $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

(b) Cas $n = 1$: vrai.

Supposons vrai pour n , alors pour $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 = - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 + (n+1)^2 = - \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(c) Cas $n = 1$: vrai.

Supposons vrai pour n , alors pour $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

(d) Calcul de $\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$:

$$= \sum_{k=1}^{1001} k(3k-1) = 3 \sum_{k=1}^{1001} k^2 - \sum_{k=1}^{1001} k = 3 \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 2003}{6} - \frac{1001 \cdot 1002}{2} = 1001 \cdot 1001 \cdot 1002 = 1'004'005'002.$$

Exercice 8.

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x \geq -1, n \geq 1$.

Solution.

i) Le cas $n = 1$ est trivialement vrai, car

$$(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x.$$

ii) Supposons que l'inégalité est vraie pour un certain $n \geq 1$. Nous pouvons écrire pour tout $x \geq -1$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'inégalité est vraie pour $n + 1$. Ainsi, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ecrire la négation des propositions suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- b) $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \implies x \leq 0)$

Solution.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
- b) $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0$.