EPFL — Lénaïc Chizat
Sections MX-EL-CGC — 23 septembre 2024

Analyse I – Série 2

Echauffement 1. (Notion de couple)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

Sol.: *On a* $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$*. Le couple* $(3, 2)$ *n'est donc pas un élément du produit cartésien* $X \times Y$*.*

Exercice 1. (V/F : ensembles)

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.
On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B, et $A \cap B$ pour leur intersection, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \qquad \text{et} \qquad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

	V	F
a) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$	☐	☐
b) $A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$	☐	☐
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	☐	☐

Sol.:

a) FAUX.
Prendre par exemple $A = [0, 2]$ *et* $B = [1, 3]$*. Dans ce cas on a*

$$\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$$

et

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = (\mathbb{R} \setminus [0, 2]) \cap (\mathbb{R} \setminus [1, 3]) = \mathbb{R} \setminus [0, 3].$$

b) VRAI.
La réciproque $(\Leftarrow)$ *est triviale.*
Pour démontrer l'implication directe $(\Rightarrow)$*, on procéde par l'absurde. Supposons que* $A \times B = B \times A$ *et que* $A \neq B$*. Sans perte de généralité, on peut supposer que* $A \not\subset B$ *et donc il existe* $a \in A$ *tel que* $a \notin B$*. Soit encore* $b \in B$*. Ainsi* $(a, b) \in A \times B = B \times A$*, ce qui veut dire que* $a \in B$*. Contradiction.*

c) VRAI.
La preuve se fait par double-inclusion :

$\subset$: Soit $(x,y) \in A \times (B \cap C)$. Alors $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$ et donc $(x,y) \in A \times B$ et $(x,y) \in A \times C$. Cela montre que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$.

$\supset$: Soit maintenant $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Alors $(x,y) \in A \times B$ et $(x,y) \in A \times C$ et donc $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$. Cela prouve que $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ et donc $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.

Exercice 2. (Relations d'équivalence)

Soit X un ensemble. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Quels sont dans les deux cas les ensembles quotient $X/_\sim$?

a) $R = \{(x,y) \in X \times X, x = y\}$
b) $R = X \times X$

Sol.:

a) On a $x \sim x$ car $x = x$; $x \sim y$ implique $y \sim x$ car $x = y$ implique $y = x$; et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent que $x \sim z$ car $x = y$ et $y = z$ impliquent que $x = z$. L'égalité $=$ est donc un cas particulier d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les ensembles qui sont les éléments de $X/_\sim$, contiennent chacune exactement un élément de X.

b) Puisque $x \sim y$ pour tout $x, y \in X$, les conditions d'une relation d'équivalence sont trivialement satisfaites. L'ensemble quotient $X/_\sim$ contient l'ensemble X comme unique élément.

Exercice 3. (Relations d'équivalence)

a) Montrer que $x \sim y$ ssi $xy > 0$, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?
b) Montrer que $x \sim y$ ssi $x - y$ est pair, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble quotient ?
c) Est-ce que $x \sim y$ ssi $x - y$ est impair, définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$?

Sol.:

a) Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ on a $x^2 > 0$ et donc $x \sim x$. Si $xy > 0$ on a aussi $yx > 0$, si bien que $x \sim y$ implique $y \sim x$. Finalement, si $xy > 0$ et $yz > 0$ on a que $0 < (xy)(yz) = xzy^2$. Il s'en suit que $xz > 0$ si bien que $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers négatifs.

b) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$. Puisque 0 est un nombre pair il s'en suit que $x \sim x$. Si $x - y$ est un nombre pair, $y - x$ est aussi un nombre pair et $x \sim y$ implique donc $y \sim x$. Finalement, si $x - y$ est pair et $y - z$ est pair, il s'en suit que $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair, et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent donc que $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

c) La relation $x \sim y$ si $x - y$ impair ne définit pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour tout x on a que $x - x = 0$, et puisque 0 est un nombre pair il en suit que x n'est pas en relation avec x ce qui viole la condition de réflexivité. (La relation est symétrique, mais la transitivité est aussi compromise.)

Exercice 4. (Graphes, fonctions)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$.

a) Trouver tous les sous-ensembles de $X \times Y$ qui sont le graphe d'une fonction de X dans Y.

b) Combien de ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ?

c) Pour les fonctions injectives, trouver le graphe de la fonction réciproque correspondante.

Sol.:

a) On a $X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$. *Les sous-ensembles recherchés sont*

$$G_1 = \{(1,3), (2,3)\}, \quad G_2 = \{(1,3), (2,4)\}, \quad G_3 = \{(1,4), (2,3)\}, \quad G_4 = \{(1,4), (2,4)\}.$$

Soit $f_i \colon X \to Y$, $i = 1, 2, 3, 4$, *la fonction qui a comme graphe* G_i. *On a par exemple* $f_2(1) = 3$ *et* $f_1(2) = 3$.

b) Les fonctions f_2 et f_3 sont injectives et surjectives et donc bijectives. Les fonctions f_1 et f_4 ne sont ni injectives ni surjectives (et donc pas bijectives). La réponse est donc : il y a deux fonctions qui sont injectives, surjectives et bijectives.

c) Seulement les fonctions f_2 et f_3 admettent une fonction réciproque $f_i^{-1} \colon Y \to X$, $i = 2, 3$ avec graphe H_i :

$$H_2 = \{(3,1), (4,2)\} \quad \textit{et} \quad H_3 = \{(3,2), (4,1)\}.$$

On a par exemple $f_2^{-1}(3) = 1$ *et* $f_3^{-1}(3) = 2$.

Remarque concernant la terminologie :
Le sous-ensemble $G = \{(1,3)\} \subset X \times Y$ est le graphe d'une fonction $f : D \to Y$ avec domaine de définition $D = \{1\} \subset X$. Dans l'exercise 4 nous ne nous intéressons qu'aux fonctions avec domaine de définition X.

Exercice 5. (V/F : fonctions)

Soient $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

	V	F
a) $f \circ g = g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad f = g$.	☐	☐
b) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.	☐	☐
c) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.	☐	☐
d) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.	☐	☐
e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective.	☐	☐
f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.	☐	☐

Sol.:

a) *FAUX.*
Prendre par exemple $f(x) = x$ *et* $g(x) = x^2$ *qui satisfont* $(f \circ g)(x) = x^2 = (g \circ f)(x)$ *avec* $f \neq g$.

b) *VRAI.*
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. *Comme* f *est injective, on a* $g(x_1) = g(x_2)$, *et par l'injectivité de* g, *il suit que* $x_1 = x_2$. *Ainsi* $f \circ g$ *est bien injective.*

c) *VRAI.*
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$. *Donc on a* $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. *Comme* $f \circ f$ *est injective, on conclut que* $x_1 = x_2$ *et donc* f *est injective.*

d) *VRAI.*
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $g(x_1) = g(x_2)$. *Donc on a* $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. *Comme* $f \circ g$ *est injective, on conclut que* $x_1 = x_2$ *et donc* g *est injective.*

e) *FAUX.*
Prendre par exemple $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = e^x$ *qui sont définies de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. *Alors* f *n'est pas injective mais* $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ *est injective.*

f) *VRAI.*
Soit $y \in \mathbb{R}$. *Comme* $f \circ g$ *est surjective, il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $(f \circ g)(x) = y$. *En posant* $z = g(x)$ *on a trouvé un* $z \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(z) = y$. *Ainsi* f *est surjective.*

Exercice 6. (Relations)

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique ? réflexive ? transitive ?

Sol. :

— *La relation n'est pas réflexive : une droite n'est pas orthogonale à elle-même.*

— *La relation est symétrique : si* D *est orthogonale à* D', *alors* D' *est orthogonale à* D.

— *La relation n'est pas transitive : si* D *est orthogonale à* D' *et si* D' *est orthogonale à* D'', *alors* D *et* D'' *ne sont pas orthogonales (elles sont parallèles ou confondues).*

Exercice 7. (Raisonnement par récurrence)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers) ;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers) ;

c) $(\star)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ (somme de cubes d'entiers).

Calculer $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Sol.:

a) *i)* *Pour* $n_0 = 1$ *on a*

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \ ,$$

et $P(1)$ *est donc vraie.*

ii) *Pour* $n \geq n_0 = 1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6} \ ,
\end{aligned}$$

et $P(n)$ *implique donc* $P(n+1)$ *pour* $n \geq n_0$*.*

b) *i)* *Pour* $n_0 = 1$ *on a (avec* $(-1)^0 = 1$*),*

$$1 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{1-k} k^2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \ ,$$

et $P(1)$ *est donc vraie.*

ii) *Pour* $n \geq n_0 = 1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&\overset{P(n)}{=} -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{-n(n+1) + 2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(-n+2n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \ ,
\end{aligned}$$

et $P(n)$ *implique donc* $P(n+1)$ *pour* $n \geq n_0$*.*

c) *i)* *Pour* $n_0 = 1$ *on a*

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{1}{2} 1 \cdot 2\right)^2 = 1 \ ,$$

et $P(1)$ *est donc vraie.*

ii) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 &\overset{P(n)}{=} \left(\frac{1}{2}\, n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{2^2}\, n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2\Big(n^2 + 2^2(n+1)\Big) \\
&= \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right) = \frac{1}{2^2}\,(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\,(n+1)\Big((n+1)+1\Big)\right)^2
\end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Pour calculer la dernière somme on utilise les résultats précédents. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1000}(k+1)(3k+2) = \sum_{k=1}^{1001} k(3k-1) &= 3\sum_{k=1}^{1001} k^2 - \sum_{k=1}^{1001} k \\
&= 3\frac{1001\cdot 1002\cdot 2003}{6} - \frac{1001\cdot 1002}{2} = \frac{1001\cdot 1002}{2}\,(2003-1) \\
&= 1001^2\cdot 1002 = 1\,004\,005\,002\ .
\end{aligned}$$

Exercice 8. (Raisonnement par récurrence)

Montrer par récurrence l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,, \quad \forall x \geq -1\,.$$

Sol.: *Soit $P(n)$ la propriété*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,, \quad \forall x \geq -1\,.$$

a) Remarquons que pour $n = 1$, la propriété est vérifiée, puisque

$$(1+x)^1 = 1 + 1x\,,$$

qui est vraie pour tout x, donc en particulier pour tout $x \geq -1$.

b) Supposons ensuite que $P(n)$ est vraie. On peut alors écrire, pour tout $x \geq -1$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \quad (\textit{car } P(n) \textit{ est supposé vérifiée et } x \geq -1) \\
&= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + (n+1)x\,.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $P(n+1)$ est aussi vérifiée.

Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9. (Négation et quantificateurs)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

2. $(\star)$ $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$.

3. $(\star)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Sol. : *Pour résoudre cet exercice, il est préférable de comprendre ce que signifie la proposition et ensuite la nier, plutôt que d'essayer d'appliquer des règles abstraites de logique.*

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

2. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A\,,\ f(x) \leq M$.

3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ *et* $x > 0$.

On verra plus tard que 2. (dans sa version non niée) est la définition de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.