

Partie I : Ensembles

Exercice 1.

On considère les ensembles $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Déterminer

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B).$$

Exercice 2.

Décrire les ensembles suivants sous la forme conditionnelle $X = \{\text{élément} \mid \text{condition}\}$, et sous la forme explicite $X = \{a, b, c, \dots\}$ (liste d'éléments avec $\dots$).

- a) L'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls.
- b) L'ensemble des nombres entiers pairs.
- c) L'ensemble des nombres entiers impairs positifs.
- d) L'ensemble des nombres entiers positifs divisibles par 3, sans 15.

Partie II : Preuves directes et par contraposée

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ecrire la négation des propositions suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- b) $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \implies x \leq 0)$

Exercice 4.

Démontrer les propositions suivantes avec une preuve directe.

- a) La somme de deux nombres entiers impairs est toujours un nombre pair.
- b) Le produit de deux nombres entiers impairs est toujours un nombre impair.

Exercice 5.

Démontrer les propositions suivantes par contraposée :

- a) Si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3.
- b) Si n^3 est pair, alors n est pair.

Partie II : Preuves par récurrence

Notations. Si $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ est une suite de nombres réels, alors on note **la somme des n premiers éléments de la suite** par

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Exercice 6.

Prouver par récurrence :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$c) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$d) \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2).$$

$$e) \text{ (Question d'examen) } \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}$$

Exercice 7.

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x \geq -1, n \geq 1$.

Partie III : Nombres rationnels et preuves par l'absurde

Exercice 8.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier avec une preuve si VRAI, ou avec un contre-exemple si FAUX.

- a) La somme de deux rationnels est rationnelle.
- b) La somme de deux irrationnels est irrationnelle.
- c) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.
- d) Le produit de deux rationnels est rationnel.
- e) Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
- f) Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.

Exercice 9.

Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Réponses.

- 8. $\text{Vrai, Faux, Faux, Vrai, Faux, Faux}$
- 9. $(p) 100, 100, 100, 100, 100, 100$
- c) $\exists x \in \mathbb{R} (f(x) < 0 \text{ et } 0 < x)$.
- d) $\forall A, 0 < A, \exists x > A, f(x) \leq M$.
- e) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$