

Cours Euler, Première année

Partie II: Géométrie plane

Jérôme Scherer et Nicolas Michel

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Introduction à la géométrie euclidienne	3
1. Notions et axiomes de base	4
2. Séparation du plan	7
3. La notion de distance	10
Chapitre 2. Les symétries axiales	13
1. Les transformations géométriques	13
2. Les isométries	15
3. La médiatrice	20
Chapitre 3. Les angles	25
1. La perpendicularité	25
2. Les angles rectilignes et les angles plans	29
3. La bissectrice	31
4. Angles opposés par le sommet	34
Chapitre 4. Les parallèles	38
1. Droites parallèles	38
2. La symétrie centrale	41
3. Le théorème de la transversale	44
4. Propriétés des parallèles	47
Chapitre 5. La mesure des angles	51
1. Terminologie sur les angles-plan	51
2. Les degrés	53
3. Les polygones simples	54
4. Somme des angles d'un triangle	56
5. Somme des angles d'un polygone	58
Chapitre 6. Classification des isométries	61

1. Le groupe des isométries	61
2. Composition de symétries	62
3. Les rotations	67

Introduction

Les objets d'étude de la géométrie euclidienne sont des notions idéales, immatérielles. Par exemple, un point en géométrie, ou une droite, n'a aucune épaisseur. On suppose donc qu'une telle notion abstraite existe, mais on ne peut pas la représenter matériellement. Il est donc nécessaire de *définir* les objets dont on parle.

On peut définir les objets géométriques à partir d'objets géométriques plus élémentaires, mais on ne peut pas faire ce processus à l'infini : il y a des objets de base dont on suppose l'existence, mais on ne cherche pas à les définir. Ce sont les *notions indéfinies*. C'est le cas des points et nous admettrons qu'ils existent.

De plus, l'observation de figures et les constructions (forcément imparfaites) ne suffisent pas à montrer des règles générales. Pourquoi les bissectrices d'un triangle se coupent-elles au centre du cercle inscrit ? Sur un dessin il se peut que l'imprécision de la construction ou l'épaisseur du trait de crayon nous induise en erreur et ce n'est qu'en nous basant sur des faits sûrs et certains - les axiomes - que nous pouvons nous en convaincre. Il en va de même de la construction à la règle et au compas du polygone régulier à 17 côtés donnée par Gauss, ou de la non-constructibilité de l'heptagone régulier.

Il est donc nécessaire de *démontrer* les propriétés des objets. On peut démontrer des théorèmes à partir de théorèmes plus simples, mais de même ce processus doit s'arrêter : il y a certaines propriétés qu'on va supposer sans chercher à les démontrer : ce sont les *axiomes*. Ces axiomes doivent refléter les propriétés « intuitives » des objets géométriques dont ils parlent.

Notre étude de la géométrie du plan se fera donc d'un point de vue axiomatique. Ceci signifie que nous allons admettre quelques règles de base que notre intuition nous recommande d'accepter, puis nous construirons une théorie en démontrant les résultats du plus élémentaire au plus complexe en nous basant sur ces règles de base uniquement. Ces semaines géométriques nous permettront ainsi de prendre de

l'assurance dans la rigueur et le raisonnement, d'acquérir une plus grande familiarité avec la notion de démonstration. Typiquement un problème de géométrie sera constitué d'une partie liée à l'observation d'une figure, puis de la compréhension d'une construction qu'il faudra non seulement savoir exécuter, mais aussi décrire avec précision, et enfin d'une justification qui démontrera finalement que la figure étudiée possède bien les propriétés prétendues.

Nous introduisons dans les chapitres qui suivent les axiomes nécessaires à l'étude de la géométrie plane, d'abord des axiomes de nature générale sur les points et les droites, puis des axiomes qui permettent de mesurer et de reporter des distances (avec une règle). Un axiome très important pour l'étude des transformations du plan garantit l'existence de symétries axiales. Les symétries vont nous permettre de comprendre quelles sont toutes les isométries du plan ! Le dernier axiome dont nous aurons besoin est celui des parallèles. Son importance est autant historique que mathématique puisque les mathématiciens se sont demandés pendant deux millénaires s'il était nécessaire et que cette question a permis l'apparition de la géométrie hyperbolique (que l'on étudie parfois en quatrième année du cours Euler).

Chapitre 1

Introduction à la géométrie euclidienne

Le but, c'est que les notions indéfinies et les axiomes qu'on suppose qu'elles vérifient forment un modèle abstrait des phénomènes qu'on observe sur le papier, avec une règle et un compas. On ne peut pas prouver que la réalité vérifie les axiomes de la géométrie euclidienne. On peut seulement vérifier que l'expérience et la théorie coïncident au niveau de précision que nous avons. Par contre, à l'intérieur d'un modèle théorique, on peut démontrer de nombreux théorèmes. C'est donc bien à l'élaboration d'un modèle que nous allons nous atteler ces prochaines semaines. Petit à petit les axiomes que nous introduisons nous rapprocherons de la géométrie telle que nous la "connaissions".

Notons également que l'expérience montre que l'univers n'est pas globalement euclidien, mais qu'il semble l'être localement (relativité générale d'Einstein). La géométrie euclidienne est une bonne approximation de la géométrie de l'univers lorsqu'on considère des distances à taille humaine.



Euclide, mathématicien grec ayant vécu probablement vers 300 avant J.-C., récolte les connaissances de son temps et les rassemble, avec ses propres découvertes, dans un recueil, les *Eléments*, de manière axiomatique. C'est son approche qui fait référence depuis plus de 20 siècles !

Il donne cependant quelques preuves intuitives car en fait il n'introduit pas suffisamment d'axiomes. Mais il est célèbre pour avoir compris que l'axiome des parallèles est bien un axiome et non un théorème qui pourrait se déduire des axiomes qui précèdent.

Il y a plusieurs systèmes d'axiomes équivalents pour la géométrie euclidienne. Nous allons suivre une voie proche de notre intuition, nous supposerons en particulier que l'on peut mesurer des distances et des angles. Dans un cours plus avancé de géométrie axiomatique on prendrait une voie plus abstraite encore, sur la base des axiomes de Hilbert (1900).

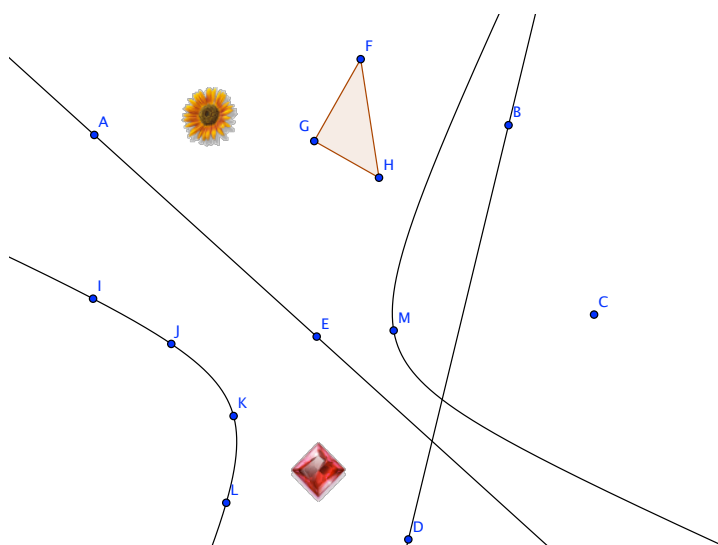
1. Notions et axiomes de base

Nous travaillons avec les notions indéfinies suivantes de la géométrie euclidienne :

- Objets : Points, droites.
- Relations entre objets : *être entre* deux points.
- Fonctions : *distance* de deux points, *aire* de surfaces polygonales convexes.

On suppose donné un ensemble, dont les éléments sont appelés *points*, qu'on notera par des lettres majuscules $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$

Définition 1.1. On appelle *figure* tout sous-ensemble de l'ensemble des points.



On suppose donné un sous-ensemble particulier de l'ensemble des figures, dont les éléments sont appelés *droites*, qu'on notera en général par des lettres minuscules a, b, c, d, \dots . Définissons maintenant les objets avec lesquels nous travaillerons et le vocabulaire associé.

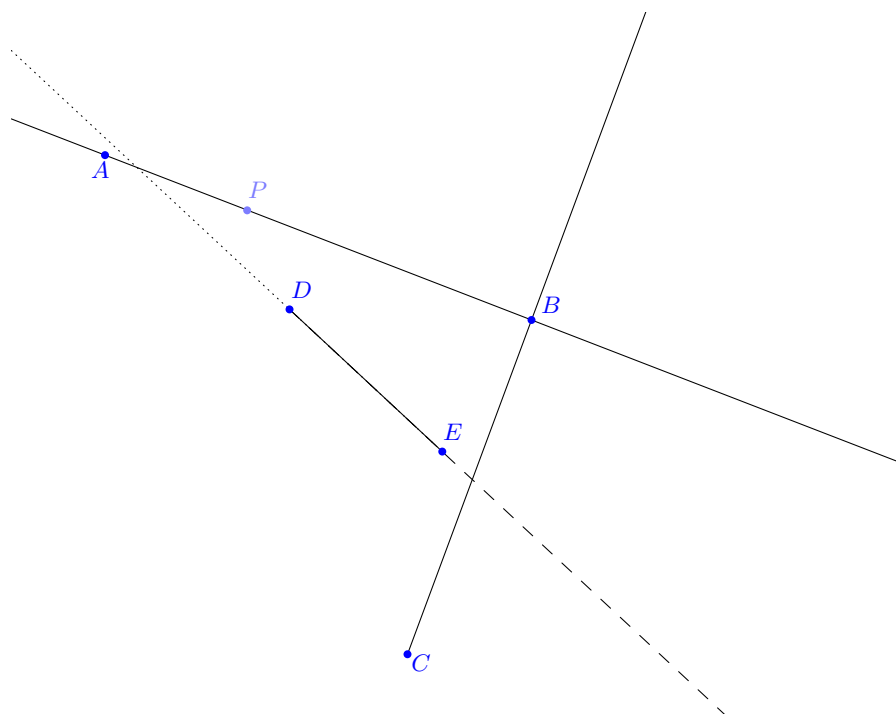
Définition 1.2. Si un point P appartient à une droite d (on note alors $P \in d$), on dit que d *passé par* P ou que P *est sur* d . Plusieurs points sont *alignés* ou *colinéaires* s'ils appartiennent à la même droite. Lorsque plusieurs droites distinctes ont un point P en commun, on dit qu'elles *se coupent* en P ou qu'elles *concourent* en P . On dit alors qu'elles sont *concourantes*. Enfin, un *plan* est la donnée d'un ensemble de points et de droites, qu'on note Π .

On peut faire les observations suivantes sur la figure ci-dessus :

le chemin le plus court. On voit qu'il existe un unique grand cercle passant par les points B et C , mais une infinité qui passent par les deux pôles !

Pour tout triple de points A , B et P d'une droite d avec $A \neq B$, on suppose donnée une relation : le point P est *entre* A et B ou il ne l'est pas.

Définition 1.7. Soient A et B des points distincts. Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des points A , B et des points de la droite AB entre A et B . Les points A et B sont appelés les *extrémités* du segment. On dit que la droite AB est le *support* du segment $[AB]$.



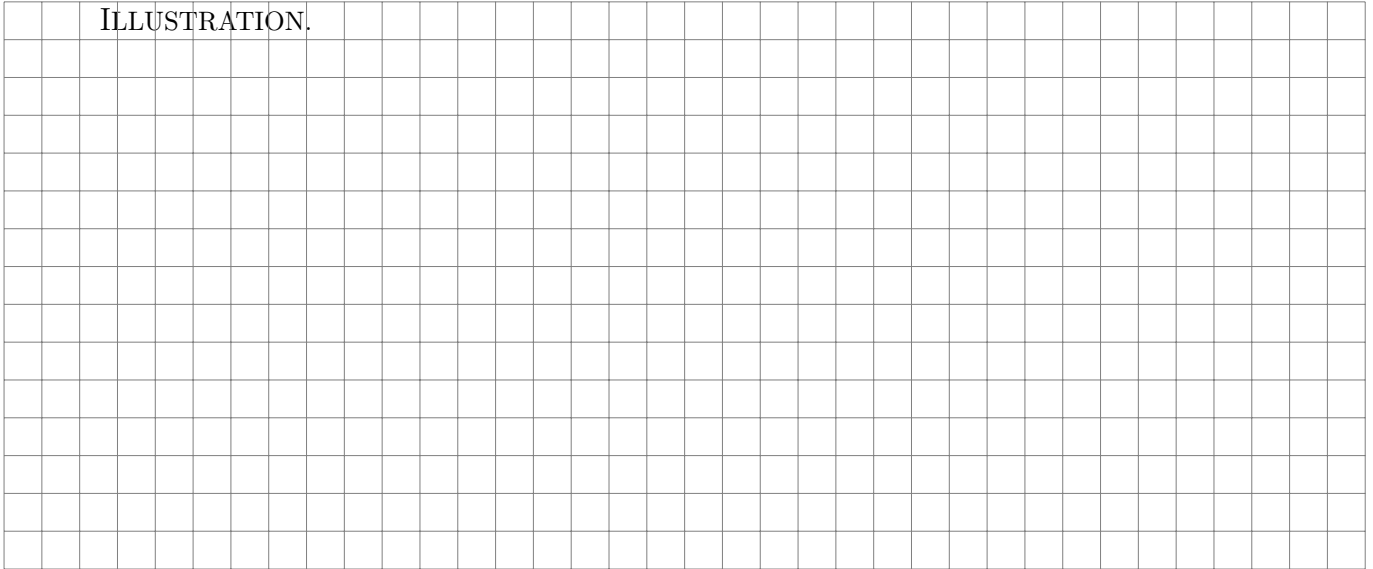
Sur cette illustration on voit un point P qui se trouve entre les points A et B , un segment $[DE]$, ainsi qu'une demi-droite $[CB]$.

Notation 1.8. On note $]AB[= [AB] \setminus \{A; B\}$ le segment $[AB]$ privé de ses extrémités, $]CD$ la demi-droite $[CD$ privée de son extrémité, etc.

Avant d'aller plus loin, nous devons définir ce langage, en particulier la notion de demi-droite, et préciser à quels axiomes la relation « être entre » est soumise.

Axiome 1.9. (S1) Axiome de la demi-droite. Tout point P d'une droite d détermine deux parties d_1 et d_2 de d , appelées *demi-droites*, qui ont les propriétés suivantes :

ILLUSTRATION.



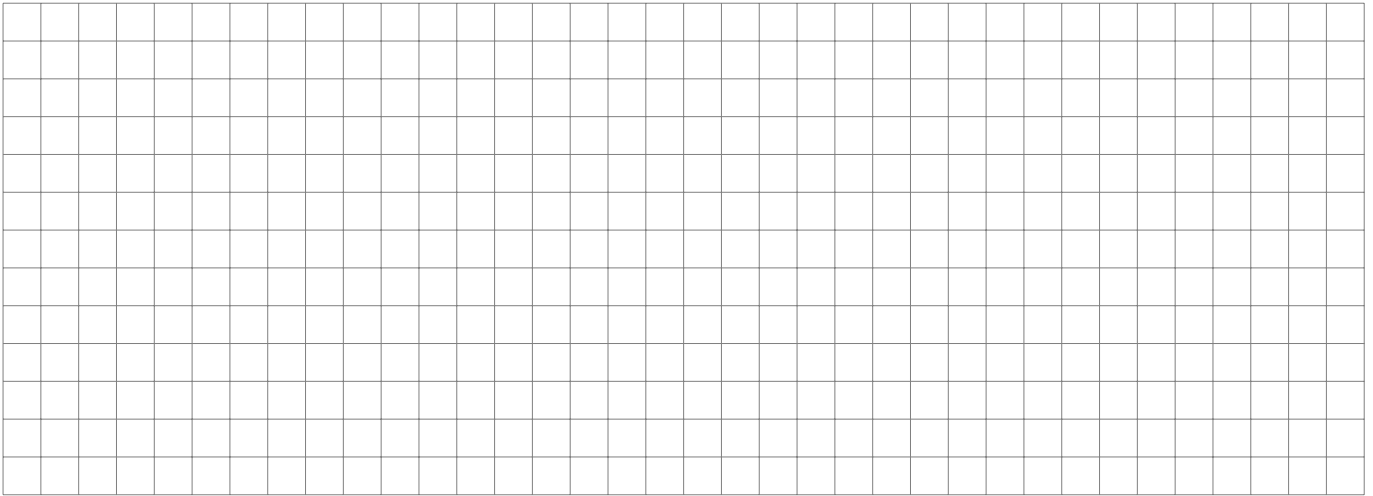
Définition 2.2. Soit d une droite et Π_1 l'un des demi-plans déterminés par d . La droite d est appelée la *frontière* du demi-plan Π_1 . Les points du demi-plan n'appartenant pas à la frontière sont appelés les *points intérieurs* du demi-plan. L'ensemble des points intérieurs, i.e. $\Pi_1 - d$, s'appelle un *demi-plan ouvert*.

Remarque 2.3. Considérons une droite d , C un point intérieur d'un demi-plan déterminé par d et D un point de l'autre demi-plan. Alors le segment $[CD]$ intersecte la droite d en un *unique* point. La raison est la suivante :



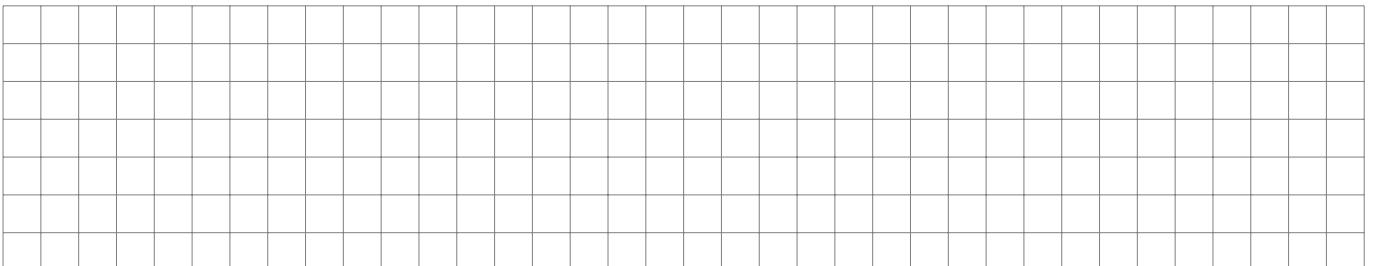
Définition 2.4. Une *ligne polygonale* ou *ligne brisée* est une suite finie de segments telle que deux segments consécutifs ont une extrémité commune. Les extrémités communes de ces segments sont les *sommets* de la ligne brisée, tandis que les extrémités libres du premier et dernier segments sont appelées les *extrémités* de la ligne brisée.

Voici quelques exemples de lignes polygonales.



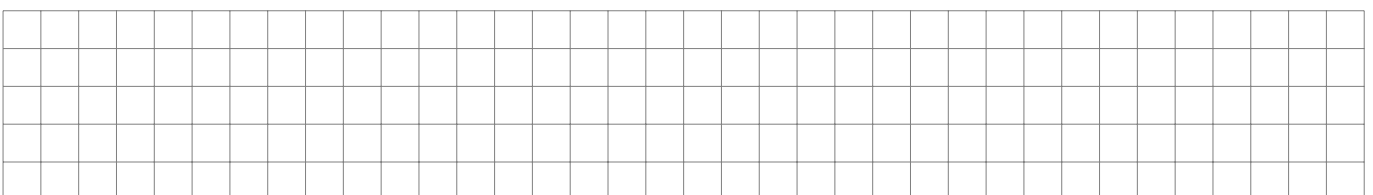
Définition 2.5. Une ligne polygonale est *tendue* si tous ses segments sont supportés par une même droite. Un *polygone* est une ligne polygonale dont les extrémités sont confondues. Il n'a donc que des sommets.

Parmi les exemples dessinés ci-dessus lesquels sont des polygones ? des lignes polygonales tendues ?

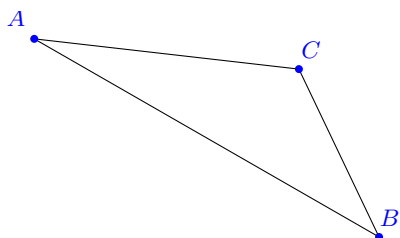


Convention 2.6. Dans la suite, toutes les lignes polygonales tendues seront supposées vérifier la condition que leurs segments ne se « chevauchent » pas, i.e. que si A, B, C sont trois sommets consécutifs d'une ligne tendue, alors C n'est pas sur la même demi-droite que A par rapport à B .

Avec cette convention, un polygone ne peut pas être tendu (on dit « dégénéré »). En particulier, un polygone a au moins trois sommets distincts. Voici un exemple et un contre-exemple :



Définition 2.7. Un *triangle* est un polygone à trois sommets. Un triangle dont les sommets sont A, B et C est souvent noté $\triangle ABC$ pour mettre l'accent de manière graphique sur le fait qu'il s'agit d'un triangle.



3. La notion de distance

On suppose donné pour toute paire de points A et B du plan un nombre réel positif, noté $d(A, B)$, appelé la *distance* de A et B .

Définition 3.1. La *longueur* d'un segment $[AB]$ est la distance de ses extrémités. On la note \overline{AB} . La *longueur* d'une ligne polygonale $A_1A_2 \dots A_n$ est la somme des longueurs des segments qui la composent. On la note $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$. On appelle *périmètre* la longueur d'un polygone.

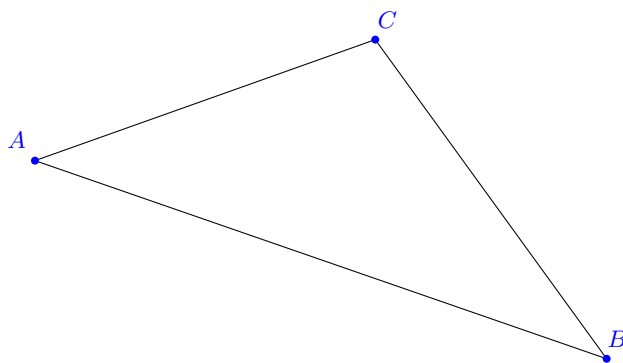
Les axiomes qui régissent la distance sont nombreux !

Axiome 3.2. Axiomes de la distance. Soient A, B, C des points du plan.

$$(D1) \quad d(A, B) = d(B, A)$$

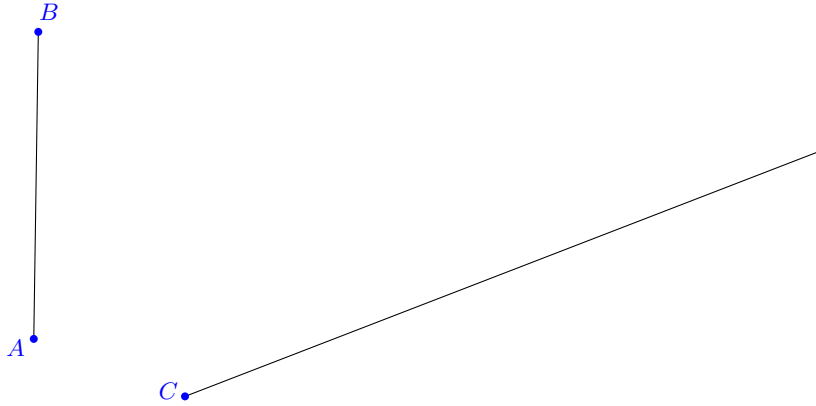
$$(D2) \quad d(A, B) = 0 \iff A = B$$

$$(D3) \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \quad d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C).$$

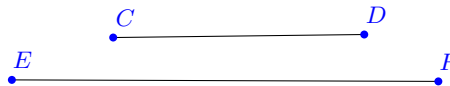


$$(D4) \quad d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) \iff B \text{ appartient au segment } [AC].$$

(D5) (*Report d'une distance sur une demi-droite*) Soient Cd une demi-droite et $[AB]$ un segment. Il existe sur Cd un unique point D tel que $d(C, D) = d(A, B)$.



(D6) (*Construction du triangle à partir de trois segments*) Soient trois segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ qui vérifient les inégalités $|\overline{EF} - \overline{CD}| < \overline{AB} < \overline{EF} + \overline{CD}$. Il existe alors exactement deux points P et P' tels que $\overline{AP} = \overline{AP'} = \overline{CD}$ et $\overline{BP} = \overline{BP'} = \overline{EF}$.



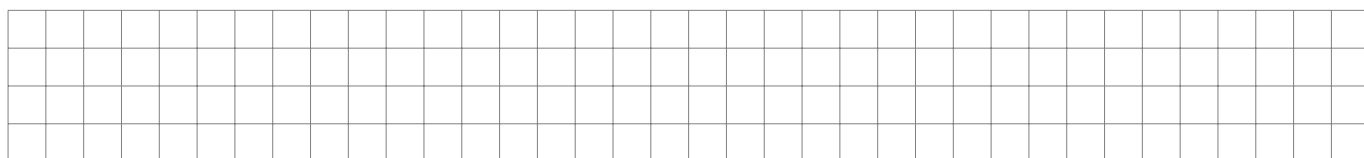
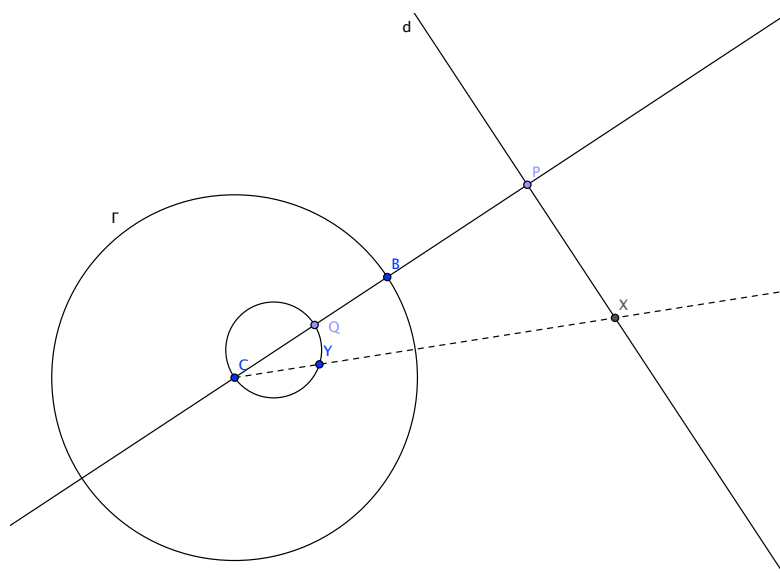
(D7) Pour tout réel strictement positif r , il existe un segment de longueur r .

Définition 1.5. Soit f une transformation du plan. Si $F \subset \Pi$ est une figure du plan, on note $f(F)$ la figure du plan définie par

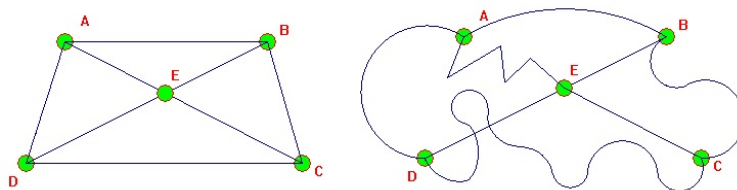
$$f(F) = \{P \in \Pi \mid P = f(P') \text{ pour un } P' \in F\}$$

La figure $f(F)$ est appelée l'*image* de la figure F sous la transformation f et on dit que f transforme F en $f(F)$.

Il existe aussi une transformation géométrique du plan appelée *inversion* qui transforme la plupart des droites en cercles ! Voici une illustration de l'effet de l'inversion par rapport au cercle Γ .



En général on pourrait imaginer que l'image d'un quadrilatère sera une sorte d'amibe informe :



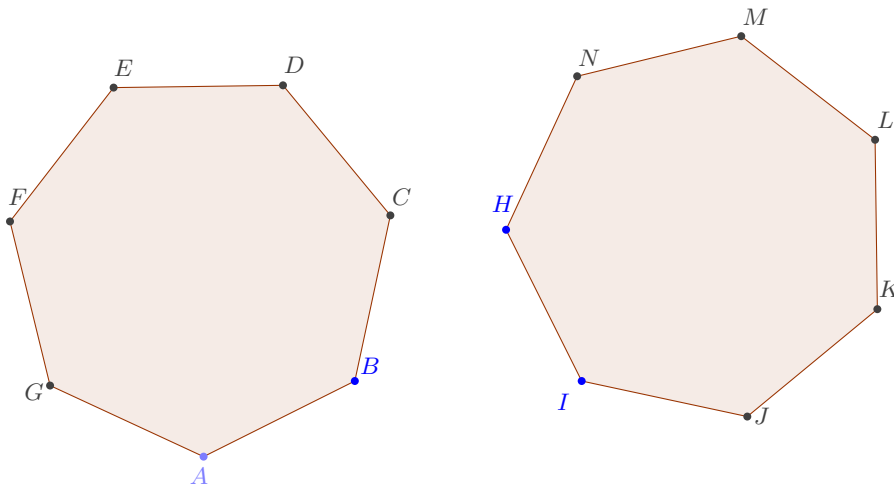
Une ligne polygonale n'est pas seulement la donnée d'une figure (c'est-à-dire un ensemble de points), mais d'une suite ordonnée de segments. L'ordre des sommets

est important. L'image d'une ligne polygonale $A_1A_2 \dots A_n$ donnée par les segments $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots, [A_{n-1}, A_n]$ est la suite $f([A_1, A_2]), f([A_2, A_3]), \dots, f([A_{n-1}, A_n])$. Les transformations transforment les points en points et les figures en figures, mais elles ne transforment pas nécessairement une droite en droite, ni un segment en segment. En particulier, l'image d'une ligne polygonale n'est pas nécessairement une ligne polygonale.

2. Les isométries

Une transformation géométrique du plan f "envoie" un point sur un point, mais rien n'est spécifié quant à l'image des droites et des segments. On étudie maintenant un type de transformations qui ont la propriété de préserver les droites et les segments, ce sont les transformations qui préservent la distance entre points. Notre compréhension de la géométrie plane englobe jusqu'ici la notion de points, de droites, de segments, mais aussi de distance et donc de construction de figures simples (triangles). L'étude des isométries complétera cela en y ajoutant la notion de symétrie.

Sur l'illustration suivante les deux heptagones $ABCDEFGG$ et $IJKLMNH$ sont isométriques, mais nous devons donner un sens précis à cela.



Définition 2.1. Une *isométrie* est une transformation géométrique du plan qui préserve les distances, c'est-à-dire une transformation $f : \Pi \rightarrow \Pi$ telle que $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ pour tous $A, B \in \Pi$.

Définition 2.2. Deux figures F et F' sont dites *isométriques* s'il existe une isométrie qui transforme F en F' . En particulier deux lignes polygonales sont isométriques s'il existe une isométrie qui transforme l'une en l'autre, à l'ordre des segments près.

La transformation *identité*, notée $\text{id} : \Pi \rightarrow \Pi$, est une isométrie. Elle envoie tout point A sur lui-même.

Remarque 2.3. Soit f une isométrie. Alors

- (1) f fait correspondre deux points distincts à deux points distincts (on dit que f est *injective*) :

$$A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B)$$

Nous démontrons la "contraposée".



- (2) Tout point du plan est l'image d'un point du plan sous f :

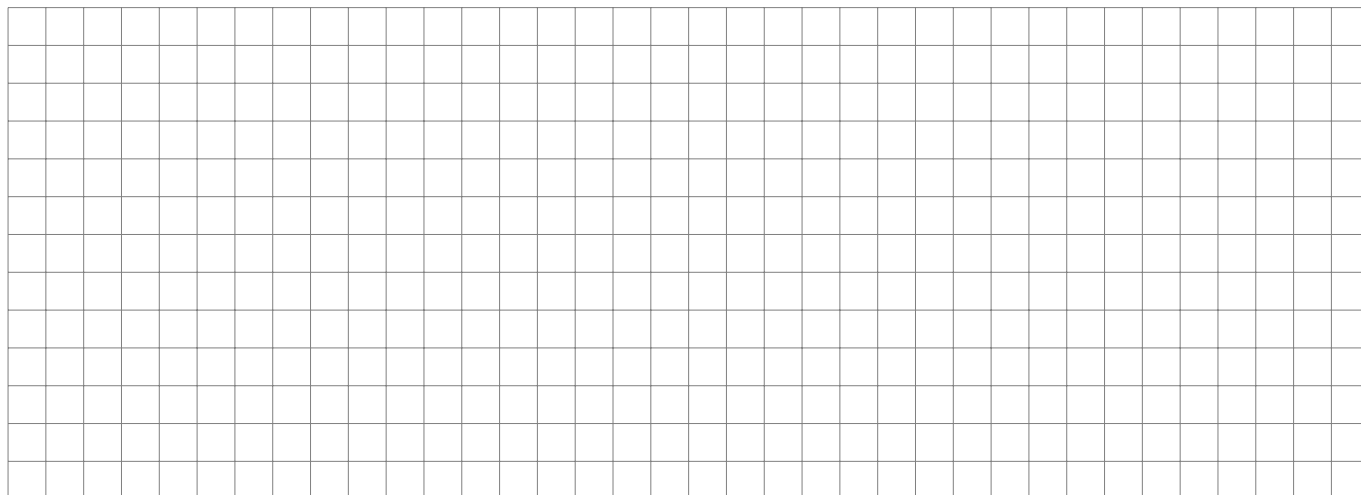
$$\text{Si } P \in \Pi, \text{ il existe } P' \in \Pi \text{ tel que } P = f(P').$$

On dit que f est *surjective*.

L'injectivité et la surjectivité de f impliquent l'existence d'une transformation inverse, c'est-à-dire d'une transformation $f^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$ telle que $f(f^{-1}(P)) = P = f^{-1}(f(P))$ pour tout point P du plan. De plus, cette transformation est aussi une isométrie.

Proposition 2.4. Soit f une isométrie. Alors les images par f de trois points alignés sont trois points alignés. Ainsi l'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment est un segment de même longueur et l'image d'une ligne polygonale est une ligne polygonale de même longueur.

DÉMONSTRATION. Soient A, B, C trois points alignés distincts. Alors l'un des trois points se trouve entre les deux autres par l'axiome de séparation (S1). Disons $C \in [A, B]$



Axiome 2.5 (Axiome de symétrie). Soit d une droite quelconque. Il existe exactement deux isométries qui laissent fixes tous les points de d . Ce sont :

- (1) L'identité.
- (2) Une isométrie qui transforme tout point P situé sur un demi-plan ouvert déterminé par d en un point P' situé sur l'autre demi-plan ouvert déterminé par d .

Cette isométrie est appelée *symétrie axiale suivant d* ou *symétrie d'axe d* ou encore *réflexion par rapport à d* . On la note souvent S_d .

Dans la pratique voici comment on construit le symétrique d'un point. Nous allons tracer des cercles, que nous devons d'abord définir.

Définition 2.6. Soit O un point du plan et r un nombre réel > 0 . Le *cercle* de centre O et de rayon r est la figure constituée de tous les points P qui vérifient $\overline{OP} = r$. On le note parfois $C(O, r)$.

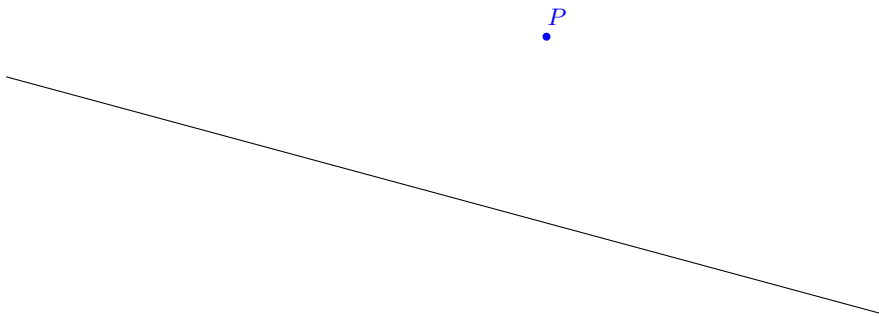
Un cercle est une figure non vide grâce à l'axiome (D7) qui nous assure qu'il existe bien un segment de longueur r et donc des points sur le cercle par l'axiome de report (D5).

Marche à suivre (Construction du symétrique d'un point P) :

Si P est sur d , il n'y a rien à faire : P est sa propre image. Supposons que $P \notin d$.

- (1) Choisir deux points distincts A et B sur d .

- (2) Tracer les cercles de centre A et de centre B passant par P .
- (3) Ces cercles se coupent en deux points : le point P et un point P' qui est le point cherché.



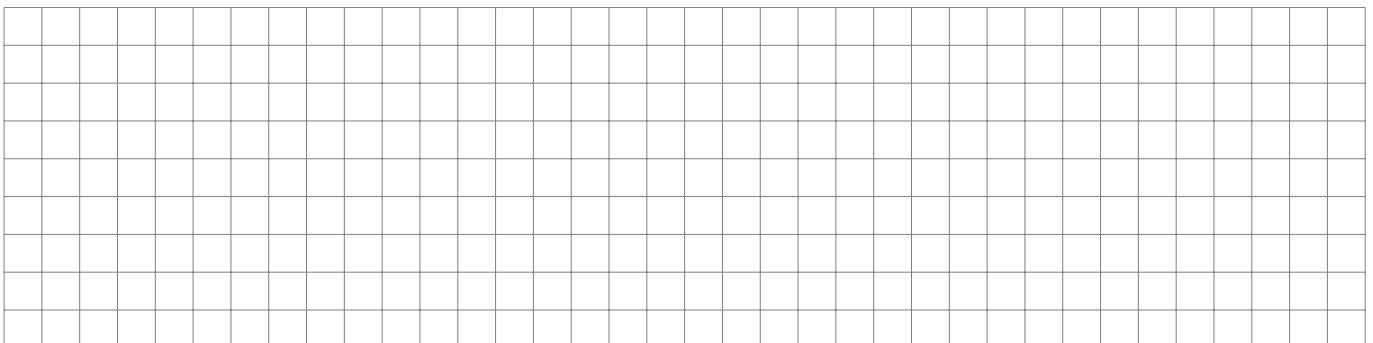
Justification (de la construction). Soit d une droite. Notons f la symétrie d'axe d . Si $P \in d$, alors $f(P) = P$. Supposons que $P \notin d$.

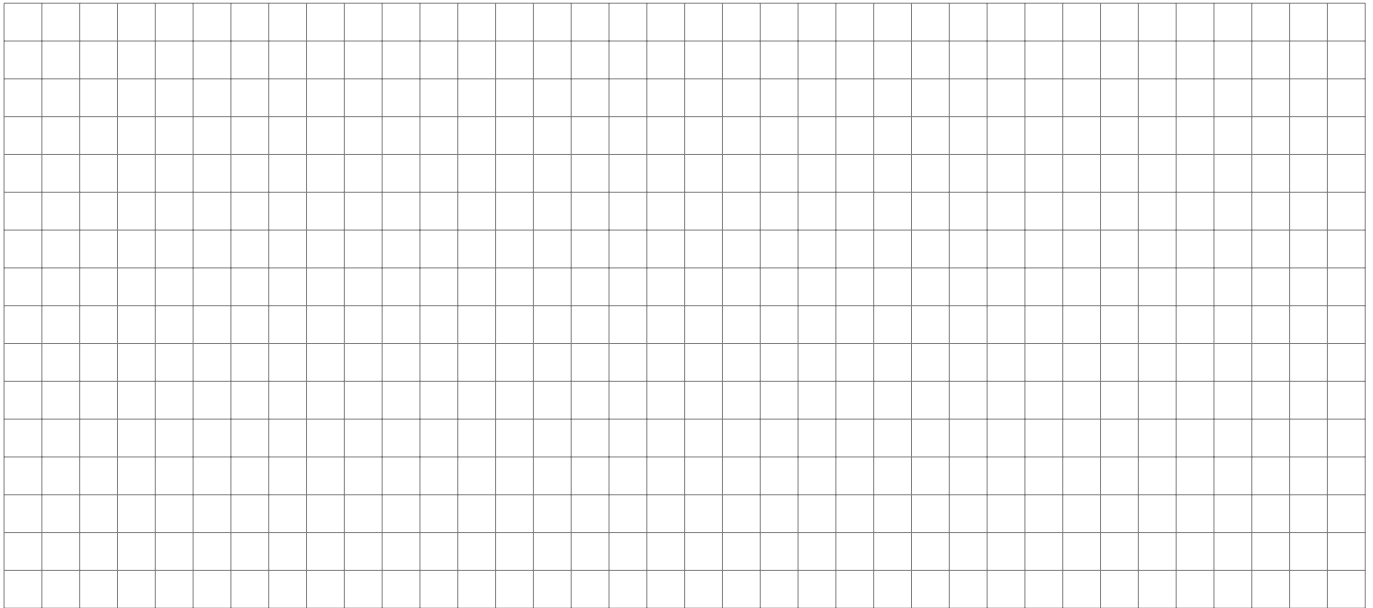
Les trois segments $[AB]$, $[AP]$ et $[BP]$ vérifient les conditions de l'axiome de construction des triangles (D.6) :

$$|\overline{AP} - \overline{BP}| < \overline{AB} < \overline{AP} + \overline{BP}.$$

puisque ces trois segments forment un triangle car P ne se trouve pas sur la droite $d = AB$.

Par conséquent, l'axiome (D6) implique qu'il existe exactement deux points R et S tels que $\overline{RA} = \overline{PA}$ et $\overline{RB} = \overline{PB}$, ainsi que $\overline{SA} = \overline{PA}$ et $\overline{SB} = \overline{PB}$.





Une conséquence de la construction précédente est que si P' est le symétrique de P par rapport à d , alors P est le symétrique de P' par rapport à d . Nous découvrirons plus tard d'autres isométries qui n'ont pas cette propriété!

Proposition 2.7. *Une symétrie est son propre inverse.*

DÉMONSTRATION. C'est probablement clair, mais répétons-le. La seule isométrie qui transforme $S_d(P)$ en P pour tous les points P du plan est S_d puisque le symétrique du symétrique d'un point est ce même point. \square

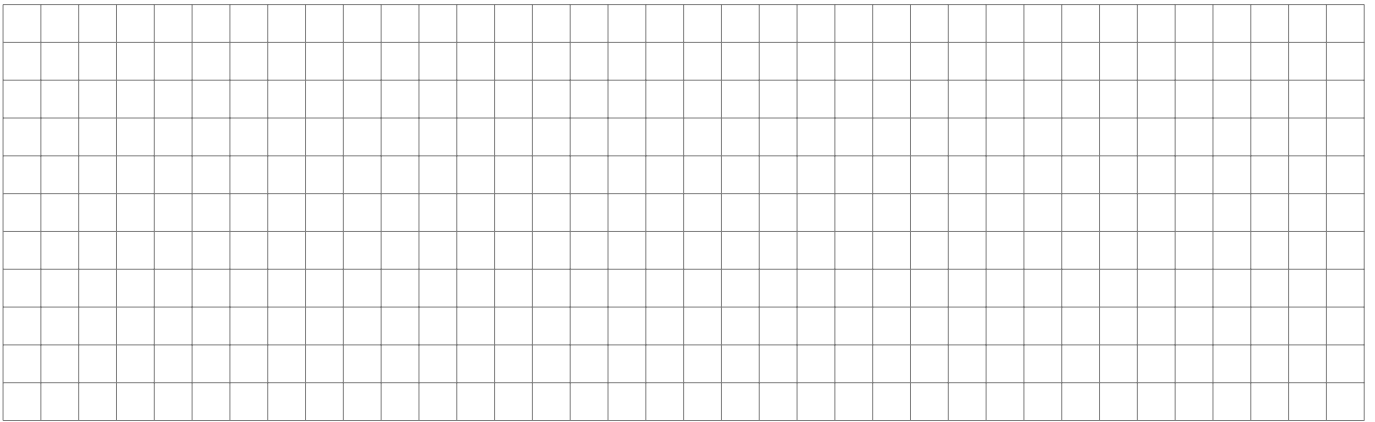
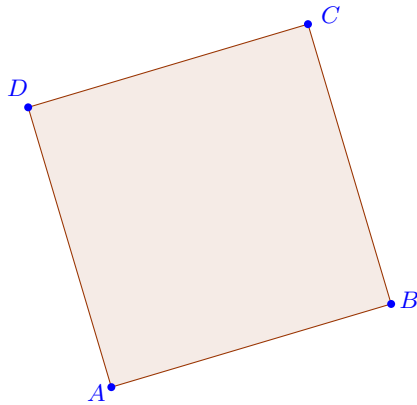
Définition 2.8. Deux figures, respectivement deux lignes polygonales, sont dites *symétriques* l'une de l'autre par rapport à une droite a lorsqu'elles sont isométriques sous la symétrie d'axe a . Une figure, respectivement une ligne polygonale, admet un *axe de symétrie* a lorsqu'elle est symétrique d'elle-même par rapport à a .

Exemple 2.9. Les deux demi-plans Π_1 et Π_2 déterminés par une droite d sont symétriques l'un de l'autre, si bien que toute droite du plan est un axe de symétrie du plan. L'axiome de symétrie exprime que le plan est symétrique par rapport à n'importe laquelle de ses droites.

Toute droite s'admet elle-même comme axe de symétrie. Plus intéressant, étant donné un point P hors d'une droite d et P' son image sous la symétrie d'axe d , la droite d est un axe de symétrie de la droite PP' puisque l'image de PP' est la droite $P'P$.

Nous n'avons pas encore étudié le carré, mais nous nous permettons d'illustrer la définition précédente en déterminant tous les axes de symétrie du carré.

Exemple 2.10. Soit A, B, C, D les sommets d'un carré.



3. La médiatrice

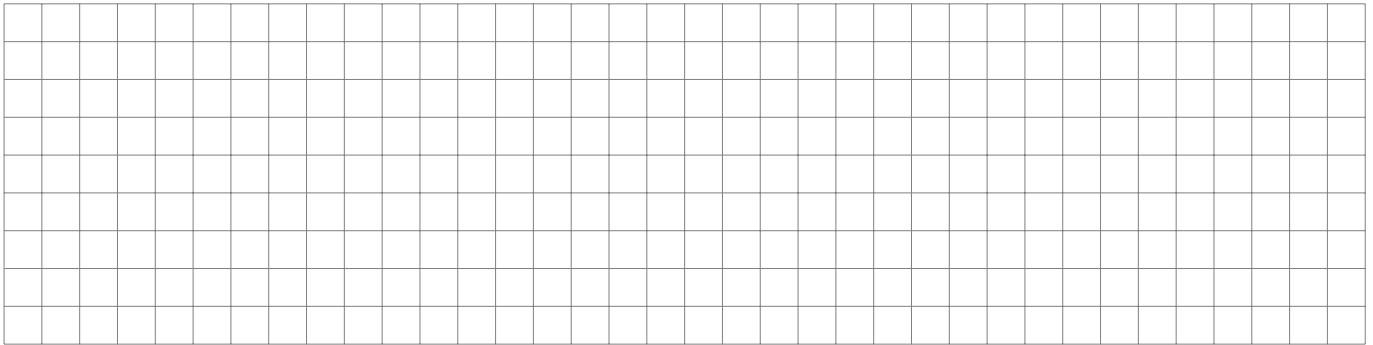
Pour décrire une figure il est souvent pratique d'expliquer quelle propriété vérifient les points de cette figure. Une propriété géométrique peut être donnée en terme de distance, de symétrie, etc.

Définition 3.1. Soit (\mathcal{P}) une certaine propriété géométrique que peut posséder un point du plan. On appelle *lieu géométrique des points du plan possédant la propriété (\mathcal{P})* la figure formée de tous les points du plan ayant la propriété (\mathcal{P}) :

$$LG_{(\mathcal{P})} = \{A \in \Pi \mid A \text{ a la propriété } (\mathcal{P})\}$$

Exemple 3.2. Soient $A \neq B$ des points du plan. On considère les propriétés

- (1) (\mathcal{P}_1) : « être aligné avec A et B » ;
- (2) (\mathcal{P}_2) : « être entre A et B » ;
- (3) (\mathcal{P}_3) : « être à des distances de A et de B dont la somme vaut \overline{AB} ».



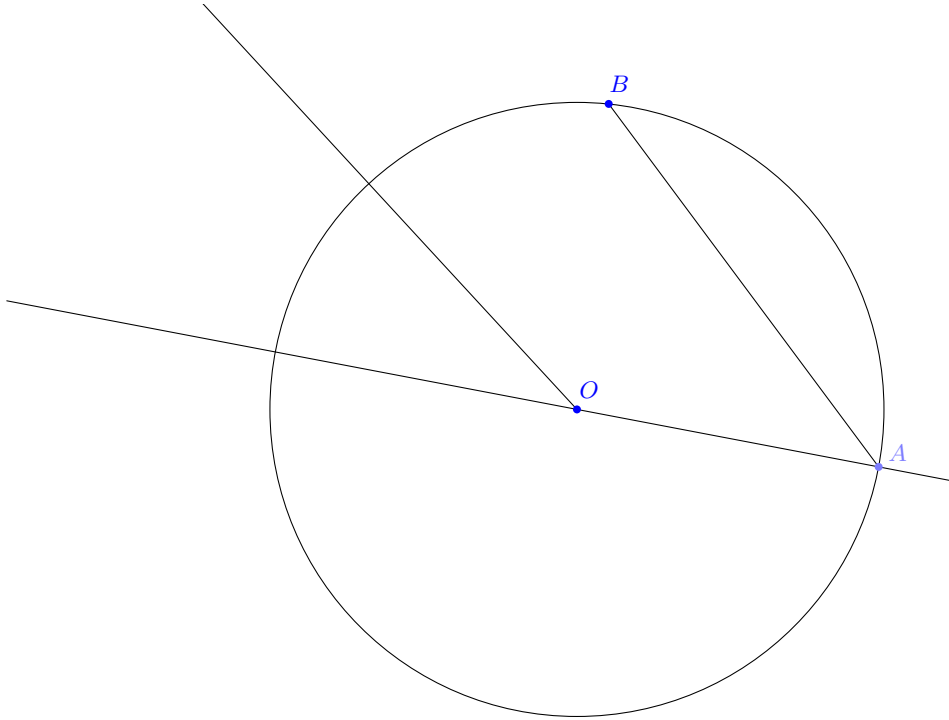
Nous avons déjà rencontré le cercle, le lieu géométrique des points du plan situés à une distance r donnée d'un point O donné. Voici encore un peu de vocabulaire.

Définition 3.3. Soit $\Gamma = C(O, r)$ un cercle de centre O et de rayon r .

- (1) Un *rayon* est une demi-droite d'extrémité le centre du cercle. On appelle aussi rayon un segment dont l'une des extrémités est le centre du cercle et l'autre est sur le cercle. Lorsqu'on dit *le rayon*, on parle toujours de la longueur des segments rayons.
- (2) Un *diamètre* est une droite passant par le centre. On appellera aussi diamètre un segment passant par le centre et ayant ses extrémités sur le cercle ou encore la longueur de ce segment (qui est la même pour tous les segments diamètres).
- (3) Une *sécante* est une droite passant par deux points distincts du cercle.
- (4) Une *corde* est un segment admettant pour extrémités deux points du cercle.
- (5) Un *arc de cercle* est l'intersection d'un cercle avec un demi-plan déterminé par une sécante. Les deux points A et B d'intersection de la sécante et du cercle sont les *extrémités* de l'arc. Chaque sécante détermine donc deux arcs. On dit que la corde $[AB]$ *sous-tend* un arc \widehat{AB} .
- (6) L'*intérieur* d'un cercle est le lieu géométrique des points dont la distance au centre du cercle est inférieure (strictement) au rayon de ce cercle.
- (7) Un *disque* est la réunion d'un cercle et de son intérieur.

- (8) L'*extérieur* d'un cercle est le lieu géométrique des points dont la distance au centre du cercle est supérieure (strictement) au rayon. C'est le complémentaire du disque dans le plan.

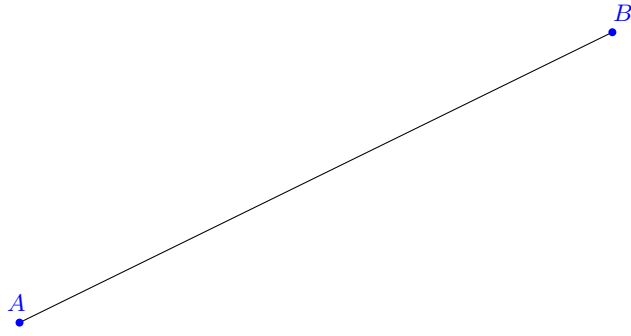
Indique sur l'illustration ci-dessous la corde $[AB]$, l'arc de cercle \widehat{AB} , etc.



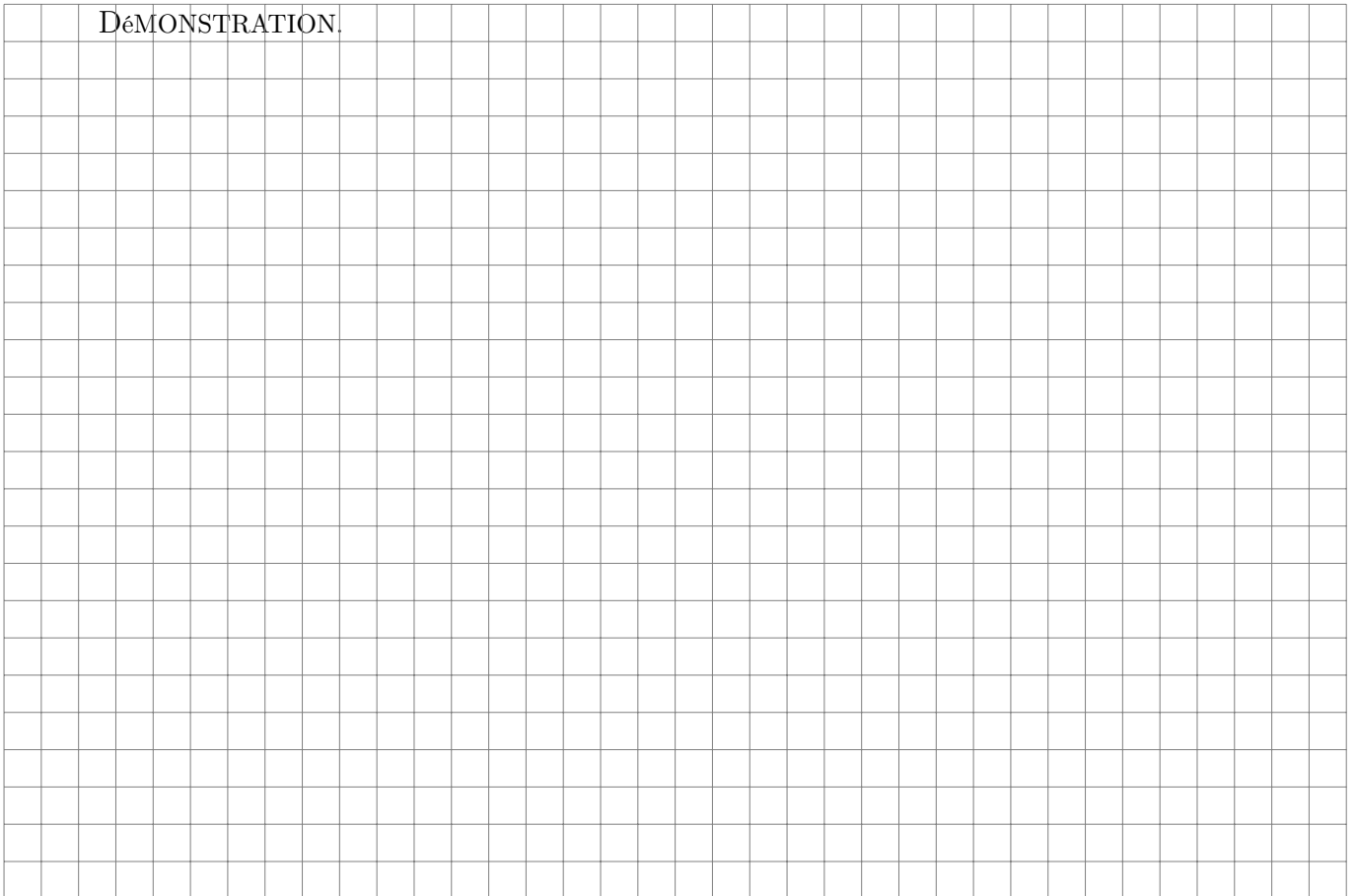
THÉORÈME 3.4. Soient A et B deux points distincts. Il existe alors exactement une réflexion transformant A en B . De plus l'axe de cette réflexion est le lieu géométrique des points équidistants à A et B . Cet axe coupe le segment $[AB]$ en un point.

Marche à suivre :

- (1) Tracer un cercle (A, r) avec $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$.
- (2) Tracer le cercle (B, r) . Ces deux cercles se coupent en deux points distincts C et D par l'axiome de construction des triangles (D6).
- (3) Tracer la droite CD . C'est la médiatrice m du segment $[AB]$.



DÉMONSTRATION.



Définition 3.5. Soient A et B deux points distincts. L'unique droite a telle que la réflexion d'axe a transforme A en B s'appelle la *médiatrice* de A et B (ou du segment $[AB]$). Le point M qui est l'intersection de a et du segment $[AB]$ est appelé le *milieu* du segment $[AB]$.

Par définition la médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment (la symétrie en question échange les extrémités). La construction de la symétrie à la règle et au compas utilise le fait qu'une symétrie est une isométrie, elle préserve les distances. Grâce à cela nous avons compris que la médiatrice est le lieu géométrique des points équidistants des extrémités du segment. Il est important de bien distinguer la définition d'une médiatrice et la propriété géométrique dont celle-ci jouit.

Chapitre 3

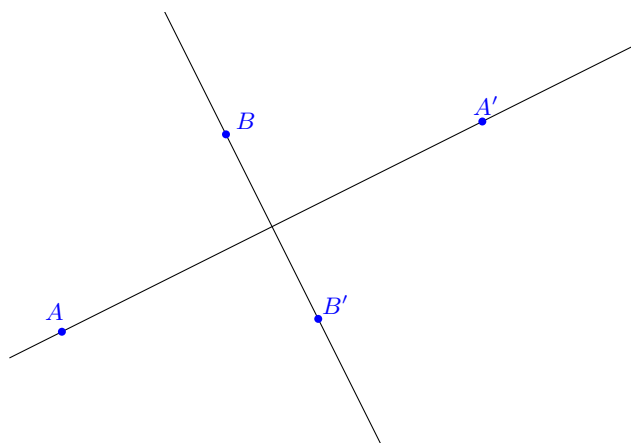
Les angles

Nous sommes prêts maintenant à parler d'angles. Nous commençons avec la notion de perpendicularité, étroitement liée à celle d'angle droit, puis nous étudierons les angles sans toutefois les mesurer pour le moment. Nous terminons ce chapitre avec la construction de la bissectrice d'un angle.

1. La perpendicularité

Notre approche nous permet de définir quand deux droites sont perpendiculaires sans devoir faire référence à la notion d'angle droit.

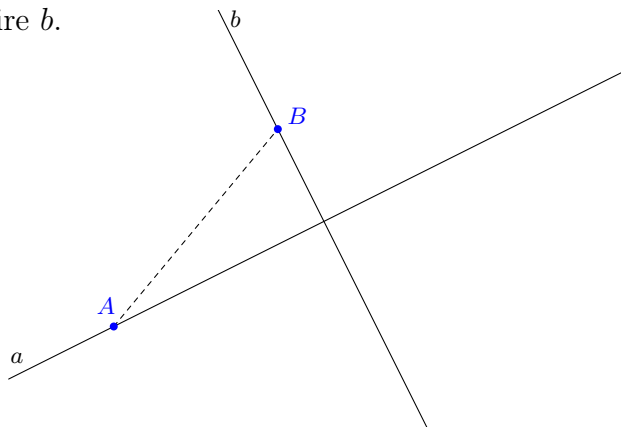
Définition 1.1. Deux droites distinctes sont *perpendiculaires* entre elles lorsque chacune d'elles admet l'autre comme axe de symétrie. On note $a \perp b$ pour dire que « a est perpendiculaire à b » ou « b est perpendiculaire à a ».



Remarque 1.2. Si a et b sont des droites distinctes, il suffit de vérifier que l'une des deux droites est un axe de symétrie de l'autre, et on a automatiquement l'inverse. En effet, supposons que b est un axe de symétrie de a et montrons qu'alors a est un axe de symétrie de b .

Si $A \in a$ est un point qui ne se trouve pas sur b , alors son image par la symétrie d'axe b est un point A' qui se trouve sur a à la même distance de tout point de la droite b que A (par construction du symétrique). Ainsi la droite b est la médiatrice du segment $[AA']$. Maintenant, si $B \in b$, son image par la symétrie d'axe a est un

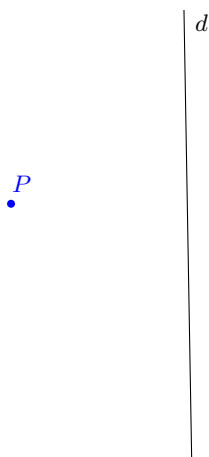
point B' qui se trouve à la même distance de A que B et à la même distance de A' que B . Ces distances étant toutes égales, le point B' se trouve aussi sur la médiatrice de $[AA']$, c'est-à-dire b .



La médiatrice m d'un segment $[AA']$ est donc toujours perpendiculaire à la droite AA' qui supporte le segment $[AA']$.

THÉORÈME 1.3. *Soit d une droite. Par tout point P du plan passe une unique droite perpendiculaire à la droite d .*

DÉMONSTRATION. Nous allons construire cette perpendiculaire pour montrer qu'elle existe et prouver qu'il n'y en a qu'une. Le premier cas est celui où $P \notin d$.

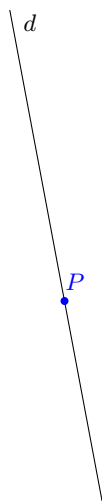


Justification. Notons que la droite $PS_d(P)$ est bien définie car $P \neq S_d(P)$. En effet, comme P est hors de d , $S_d(P)$ est de l'autre côté de la droite d , par l'axiome de symétrie. De plus si la perpendiculaire existe, d doit être un axe de symétrie de cette droite, elle doit donc passer par P et $S_d(P)$. Autrement dit l'unicité est démontrée.

On montre maintenant que la droite d est un axe de symétrie de la droite $PS_d(P)$. On aura par conséquent construit une droite perpendiculaire à d passant par P par définition de la perpendicularité.

La symétrie S_d transforme P en $S_d(P)$ par définition, et donc $S_d(P)$ en P car une symétrie est son propre inverse (proposition du cours précédent). Comme les isométries préservent les droites, la symétrie S_d transforme la droite $PS_d(P)$ en une droite passant par l'image de P , soit $S_d(P)$, et par l'image de $S_d(P)$, soit P . La droite $PS_d(P)$ est donc sa propre image sous S_d .

Le deuxième cas à traiter est celui où P est sur d .

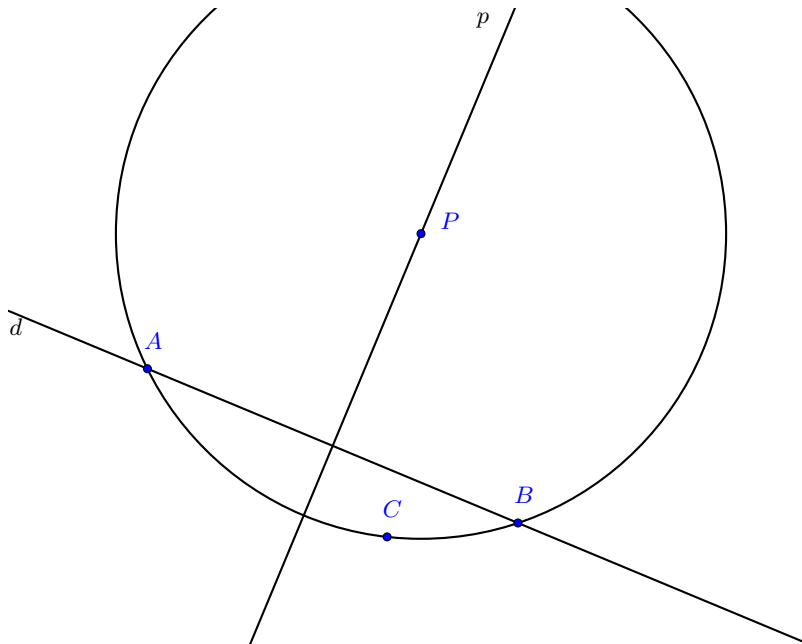


Justification. Montrons que la construction précédente fait sens et donne bien une perpendiculaire à d passant par P . Sur chaque demi-droite de d d'extrémité P , il existe exactement un point à distance r de P , par les axiomes (D5) et (D7). Ce

sont les points A et B construits ci-dessus. On sait que la médiatrice d'un segment est perpendiculaire au support de celui-ci. Donc la médiatrice p de $[AB]$ est perpendiculaire à $AB = d$. Le point P est à équidistance de A et B , c'est le centre du cercle construit, et le théorème de la médiatrice identifie celle-ci comme le lieu des points équidistants des extrémités du segment. Ainsi p passe par P .

Montrons l'unicité. Soit a une droite perpendiculaire à d passant par P . Soient A et B les deux points définis ci-dessus. On va montrer que $a = p$, la médiatrice de $[AB]$. La symétrie d'axe a transforme d en elle-même, par définition de la perpendicularité. Le point A est donc transformé en un point A' sur d , dans l'autre demi-plan déterminé par a que A . Le point A' doit donc se trouver sur la demi-droite $[PB$. Or sur cette demi-droite, il n'existe qu'un seul point à distance r de P , par l'axiome (D5). Ainsi, on doit avoir $A' = B$. La réflexion d'axe a transforme donc A en B . Autrement dit, a est la médiatrice p de $[AB]$. \square

Remarque 1.4. Il existe une deuxième méthode pour construire la perpendiculaire à une droite d passant par un point $P \notin d$. La justification de cette méthode nécessite néanmoins plus de connaissances sur les cercles.



Voici donc simplement la marche à suivre :

- (1) Choisir un point C situé de l'autre côté de d que P .
- (2) Tracer le cercle de centre P et de rayon \overline{PC} . Il coupe d en A et B .
- (3) Construire la médiatrice p du segment $[AB]$. C'est la droite cherchée.

Définition 1.5. La *projection* d'un point P sur une droite d est le point d'intersection de la droite d avec la perpendiculaire à d issue de P . On note $\text{proj}_d(P)$ ce point. La *distance d'un point P à une droite d* est la distance de P à $\text{proj}_d(P)$. On la note $d(P, d)$. Si le point P est sur la droite d , alors $\text{proj}_d(P) = P$ et $d(P, d) = 0$.

2. Les angles rectilignes et les angles plans

On donne d'abord la définition d'angle rectiligne, mais à cause de l'indétermination (de quel angle parle-t-on vraiment ?) il faudra préciser ce qu'on entend par intérieur et extérieur d'un angle, ce qui nous permettra finalement de parler d'angles plans.

Définition 2.1. Un *angle rectiligne* est la donnée d'un point et de deux demi-droites ayant ce point comme extrémité. Ces deux demi-droites sont appelées les *côtés* de l'angle et leur extrémité commune, le *sommet*.

On note Sab un angle rectiligne de côtés Sa et Sb et de sommet S . Le mot angle rectiligne s'abrège \angle . On désigne parfois les angles rectiligne par une lettre grecque α, β, \dots ou par un numéro $\angle 1, \angle 2, \dots$, ou encore par des points qui les déterminent, comme $\angle ABC, \angle USV, \dots$, où le sommet est la lettre du milieu. On note aussi \widehat{ABC} pour $\angle ABC$.

ILLUSTRATION.



Remarque 2.2. Un angle n'est pas une figure. En effet, un angle est une paire (Sa, Sb) formée de deux demi-droites de même extrémité. En particulier, un angle plat n'est pas seulement la figure formée par l'ensemble de ces points, c'est-à-dire une droite, mais la donnée d'une droite et d'un point distingué sur cette droite (le sommet de l'angle).

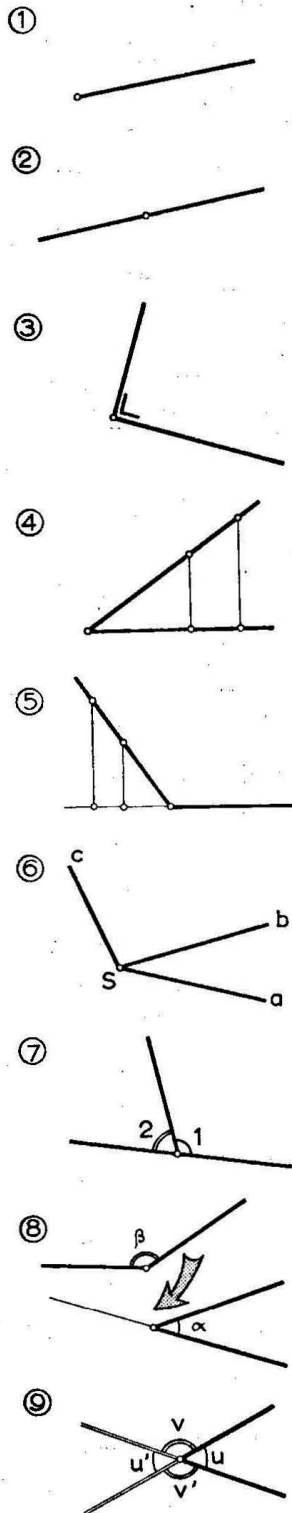


Fig. 70

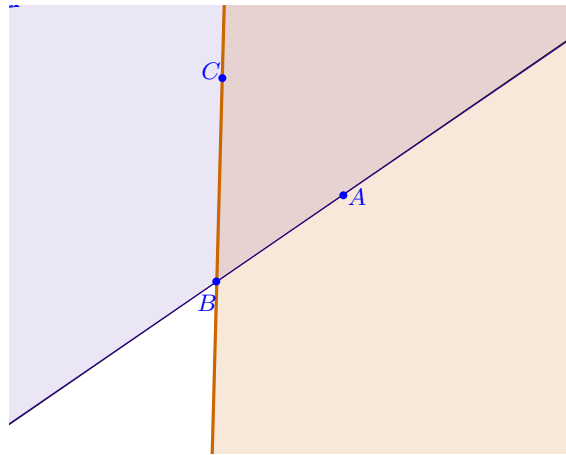
1. **Angle nul.** Angle ayant ses côtés confondus. C'est en fait une demi-droite.
2. **Angle plat.** Angle ayant ses côtés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est une droite sur laquelle on a mis un point en évidence.
3. **Angle droit.** Angle dont les côtés ont des supports perpendiculaires.
4. **Angle aigu.** Angle non droit tel que tout point pris sur l'un de ses côtés se projette sur l'autre côté.
5. **Angle obtus.** Angle non droit tel que tout point pris sur l'un de ses côtés se projette sur le prolongement de l'autre côté.
6. **Angles adjacents.** Deux angles sont dits adjacents lorsqu'ils ont un côté identique. Sur la figure, les angles **Sab** et **Sbc** sont adjacents; les angles **Sab** et **Sac** aussi, d'ailleurs.
7. **Angles adjacents supplémentaires.** Deux angles sont dits adjacents supplémentaires lorsqu'ils sont adjacents et que leurs côtés non confondus sont dans le prolongement l'un de l'autre. C'est le cas des angles 1 et 2 sur la figure ci-contre.
8. **Angles supplémentaires.** Deux angles sont dits supplémentaires lorsque, par un déplacement convenable appliqué à l'un d'eux, il est possible de les rendre adjacents supplémentaires. Il en est ainsi des angles α et β de la figure 70⁸⁾.
9. **Angles opposés par le sommet.** Deux angles sont dits opposés par le sommet quand les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. Sur la figure ci-contre, les angles **u** et **u'** sont opposés par le sommet; les angles **v** et **v'** aussi.

On pourrait encore ajouter la définition d'un *angle plein* comme étant l'extérieur d'un angle nul, mais définissons d'abord intérieur et extérieur d'un angle.

Définition 2.3. L'intérieur d'un angle rectiligne \widehat{ABC} ni nul ni plat est l'intersection $\overset{\circ}{\Pi}_1 \cap \overset{\circ}{\Pi}_2$ où

- $\overset{\circ}{\Pi}_1$ est le demi-plan ouvert de frontière AB contenant C ,
- $\overset{\circ}{\Pi}_2$ est le demi-plan ouvert de frontière BC contenant A .

L'intérieur d'un angle rectiligne nul est vide et l'intérieur d'un angle rectiligne plat est indéterminé. Un *angle-plan saillant* est la réunion d'un angle rectiligne non plat et de son intérieur ou d'un angle rectiligne plat et de l'un des demi-plans qu'il détermine.



Définition 2.4. L'extérieur d'un angle rectiligne \widehat{ABC} ni nul ni plat est la réunion $\overset{\circ}{\Pi}_1 \cup \overset{\circ}{\Pi}_2$ où

- $\overset{\circ}{\Pi}_1$ est le demi-plan ouvert de frontière AB ne contenant pas C ,
- $\overset{\circ}{\Pi}_2$ est le demi-plan ouvert de frontière BC ne contenant pas A .

L'extérieur d'un angle rectiligne nul Sab est le complémentaire de la demi-droite $Sa = Sb$ dans le plan. L'extérieur d'un angle rectiligne plat n'est pas déterminé. Un *angle-plan rentrant* est la réunion d'un angle rectiligne non plat et de son extérieur.

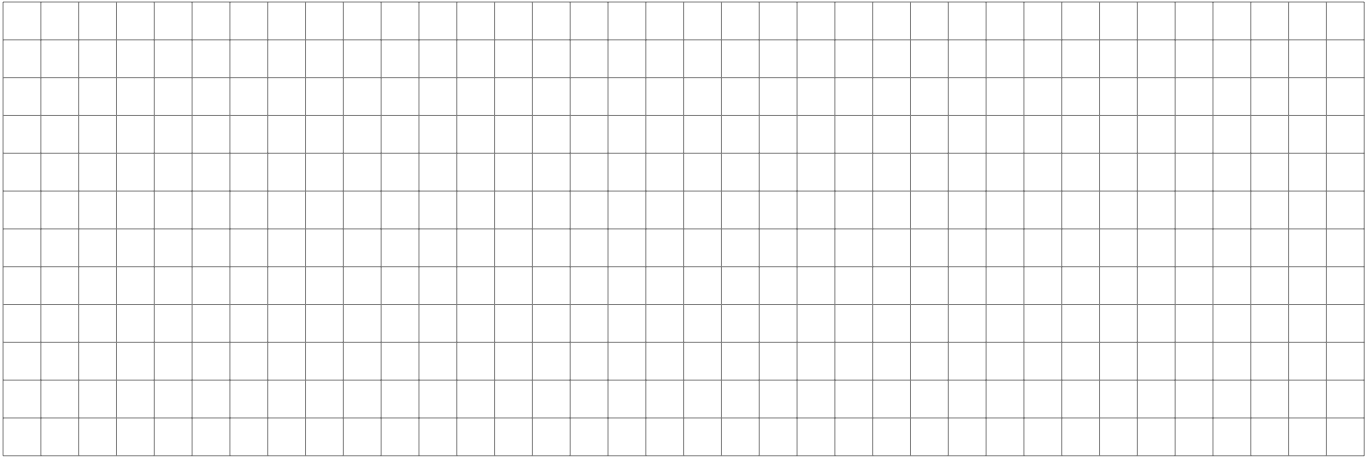
Pour distinguer les angles-plans des angles rectilignes, on peut utiliser le symbole \triangleleft à la place de \angle . Ainsi tout angle rectiligne détermine deux angles-plans. Sans autre précision, l'angle-plan associé à un angle rectiligne non plat est son angle-plan saillant. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira simplement *angle* pour un angle-rectiligne ou son angle-plan (saillant) associé.

3. La bissectrice

Nous sommes prêts à rencontrer, après la médiatrice d'un segment, notre deuxième droite remarquable. Si la médiatrice est l'axe de symétrie d'un segment, la bissectrice

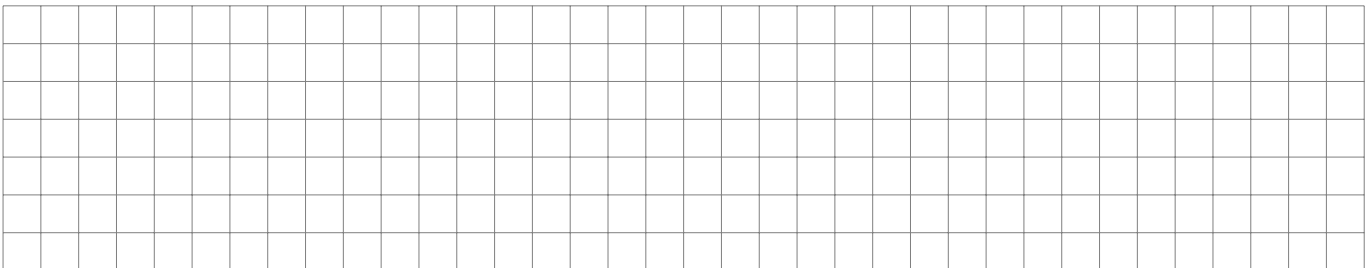
est l'axe de symétrie d'un angle. Nous commençons avec le cas spécial d'un angle plat.

Remarque 3.1. Un angle plat Sab possède deux axes de symétrie, la perpendiculaire à $a = b$ passant par S et la droite $a = b$.



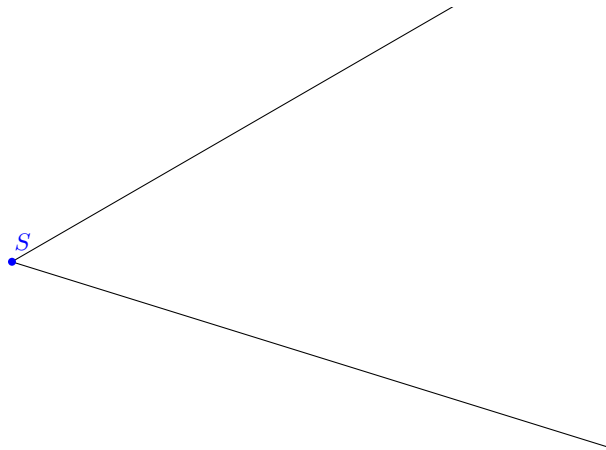
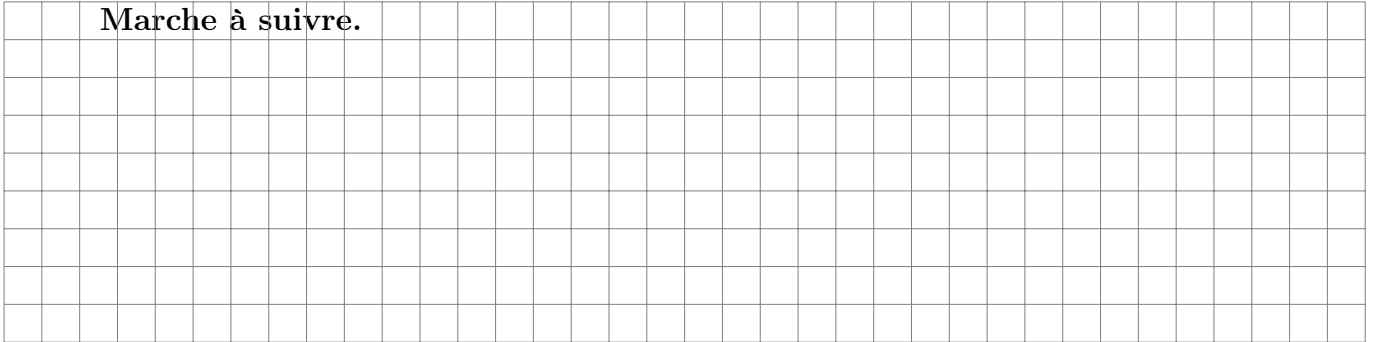
THÉORÈME 3.2. *Un angle Sab non plat admet un unique axe de symétrie, appelé la bissectrice de Sab .*

DÉMONSTRATION. Si l'angle est nul, alors il n'y a rien à faire : l'axe de la symétrie est la droite qui supporte l'angle, qui est laissé fixe par l'axiome de symétrie. Cet axe de symétrie est unique. En effet la symétrie S_d doit fixer le sommet S et donc d doit passer par S . Donc soit $d = a$, soit d est la perpendiculaire à a passant par S . Mais la symétrie d'axe d dans ce dernier cas ne fixe pas la demi-droite Sa , puisqu'elle la transforme en l'autre demi-droite Sa .

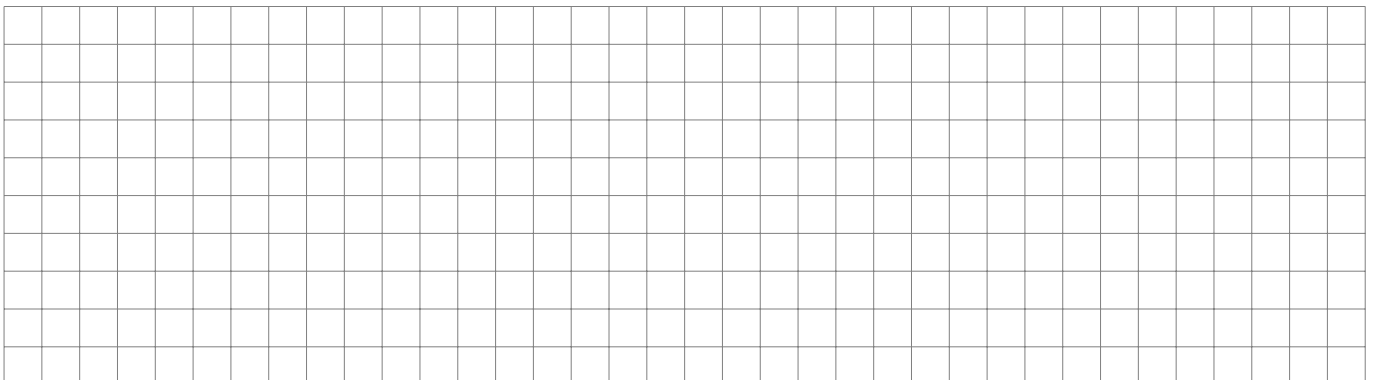


Supposons donc que l'angle n'est pas nul et montrons d'abord l'existence en proposant une construction d'un axe de symétrie.

Marche à suivre.



Justification. Montrons que la construction précédente fait sens et donne bien un axe de symétrie de l'angle. Il existe sur chaque demi-droite Sa et Sb un unique point à distance r de S par l'axiome (D5). Ce sont les points A et B . Ces points sont distincts, puisque distincts de S ($r > 0$) et sur des demi-droites différentes. Ils admettent donc une médiatrice s . Cette médiatrice est un axe de symétrie de Sab :

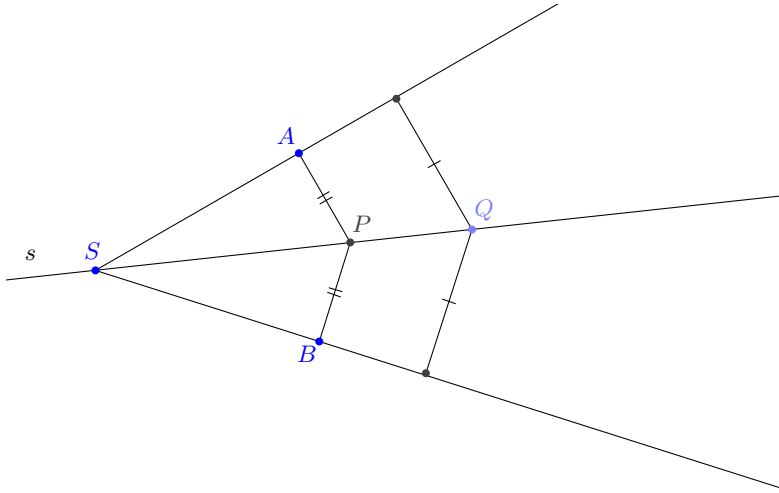


Montrons maintenant l'unicité de la bissectrice. Soit d un axe de symétrie d'un angle Sab . Considérons deux points A et B sur Sa et Sb comme ci-dessus. Comme

les isométries préservent les demi-droites, la symétrie S_d doit transformer Sa en Sb . En particulier, elle fixe le sommet S . De plus, elle transforme le point A en un point sur Sb qui est à la distance r de S (par préservation des distances). Or, par l'axiome (D5), il n'existe qu'un seul point avec cette propriété. Donc, $A' = B$. Autrement dit, d est la médiatrice de A et B . \square

THÉORÈME 3.3. *Soit Sab un angle non plat et soit s sa bissectrice. Alors la demi-droite Ss qui est contenue dans l'angle-plan associé est le lieu géométrique des points de l'angle-plan qui sont à équidistance des droites a et b .*

DÉMONSTRATION. Soit P un point de la demi-droite Ss . On abaisse la perpendiculaire à Sa issue de P et on appelle A le pied de la perpendiculaire sur a . On construit ensuite $B = S_s(A)$. On observe alors que $S_s([PA]) = [PB]$ et que, puisque PA et a sont perpendiculaires, leurs images par S_s aussi le sont : $PB \perp b$. Par conséquent B est le pied de la perpendiculaire à b issue de P , autrement dit $d(P, a) = d(P, b)$. \square

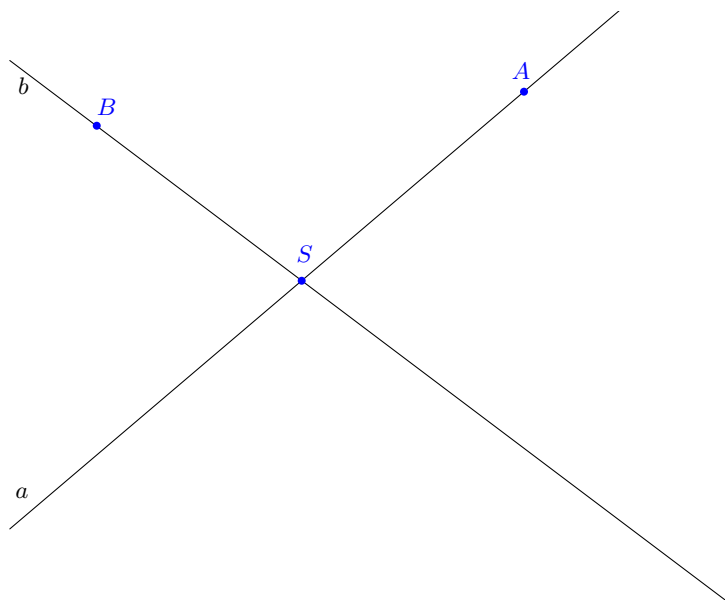


4. Angles opposés par le sommet

Grâce à notre parfaite compréhension de ce qu'est une bissectrice, nous pouvons démontrer que deux angles opposés par le sommet sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie qui transforme l'un en l'autre.

Proposition 4.1. *Deux angles Sab opposés par le sommet sont isométriques via la réflexion dont l'axe est la bissectrice t de l'un des deux angles Sab adjacents-supplémentaires (et donc des deux).*

DÉMONSTRATION. Considérons un angle \widehat{ASB} avec $A \in a$ et $B \in b$. On choisit encore deux points A' sur a de l'autre côté de S que A et B' sur b de l'autre côté de S que B . Soit enfin t la bissectrice de l'angle $\widehat{ASB'}$:

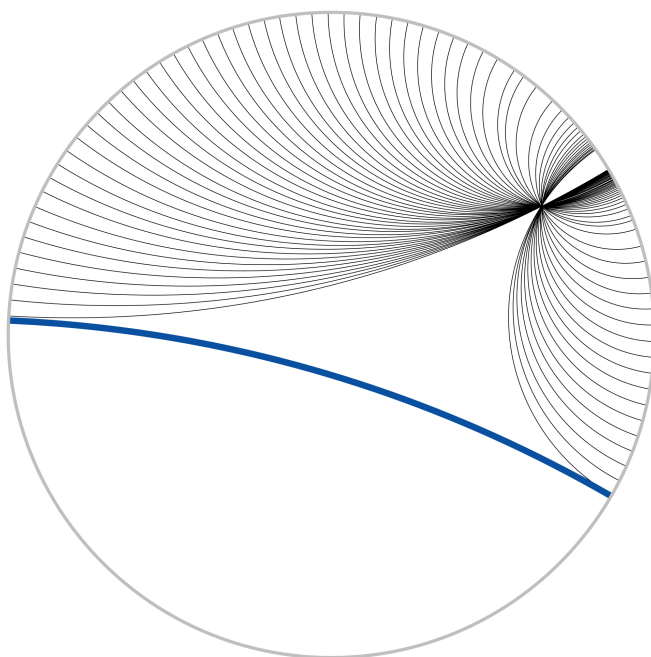


□

Chapitre 4

Les parallèles

Ce chapitre est consacré aux questions liées à la notion de parallélisme. S'il est possible de construire une parallèle à une droite donnée et passant par un point donné, nous aurons besoin d'un dernier axiome pour imposer l'unicité de cette parallèle. Cette question a occupé les mathématiciens pendant environ deux millénaires, depuis Euclide qui s'était rendu compte de la nécessité de cet axiome mais ne connaissait pas la géométrie hyperbolique dans laquelle de nombreuses parallèles différentes passent par un même point.



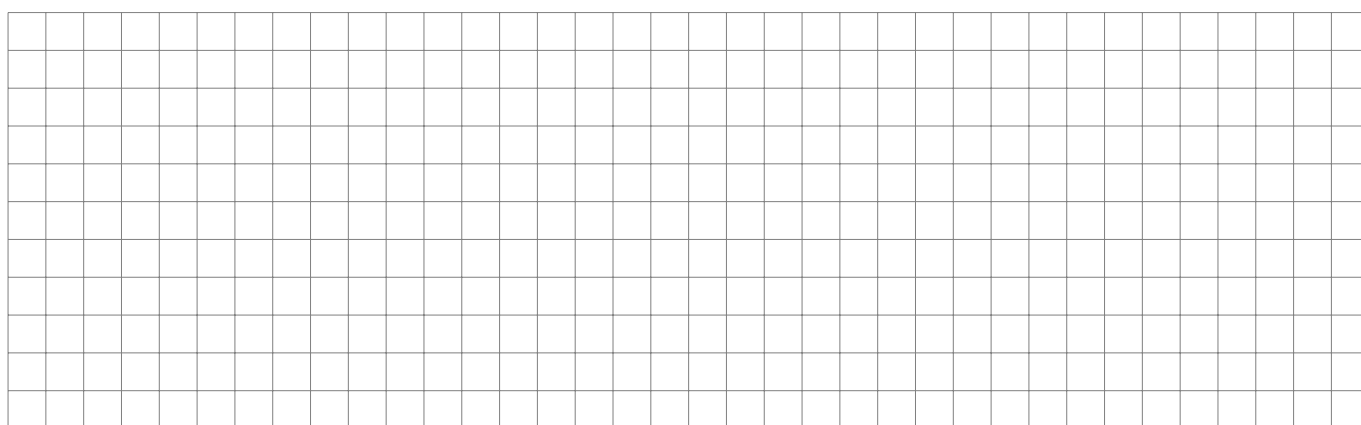
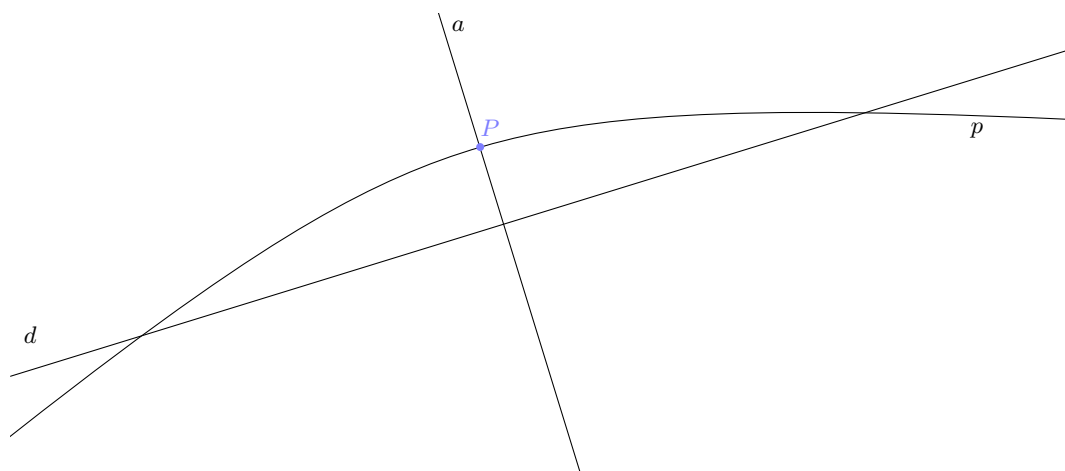
1. Droites parallèles

Nous allons d'abord faire tout ce qu'il est possible de faire sans introduire d'axiome supplémentaire.

Définition 1.1. Deux droites a et b sont *parallèles* lorsqu'elles n'ont aucun point commun : $a \cap b = \emptyset$.

Justification. Nous savons que par un point P hors de d passe une unique perpendiculaire à d . Notons a cette perpendiculaire, comme ci-dessus. Maintenant, par P passe une unique perpendiculaire à a , qu'on note p . Nous devons montrer que p est parallèle à d . On sait que p est distincte de d car p contient le point P qui est hors de d .

Montrons que p et d ne se coupent pas.

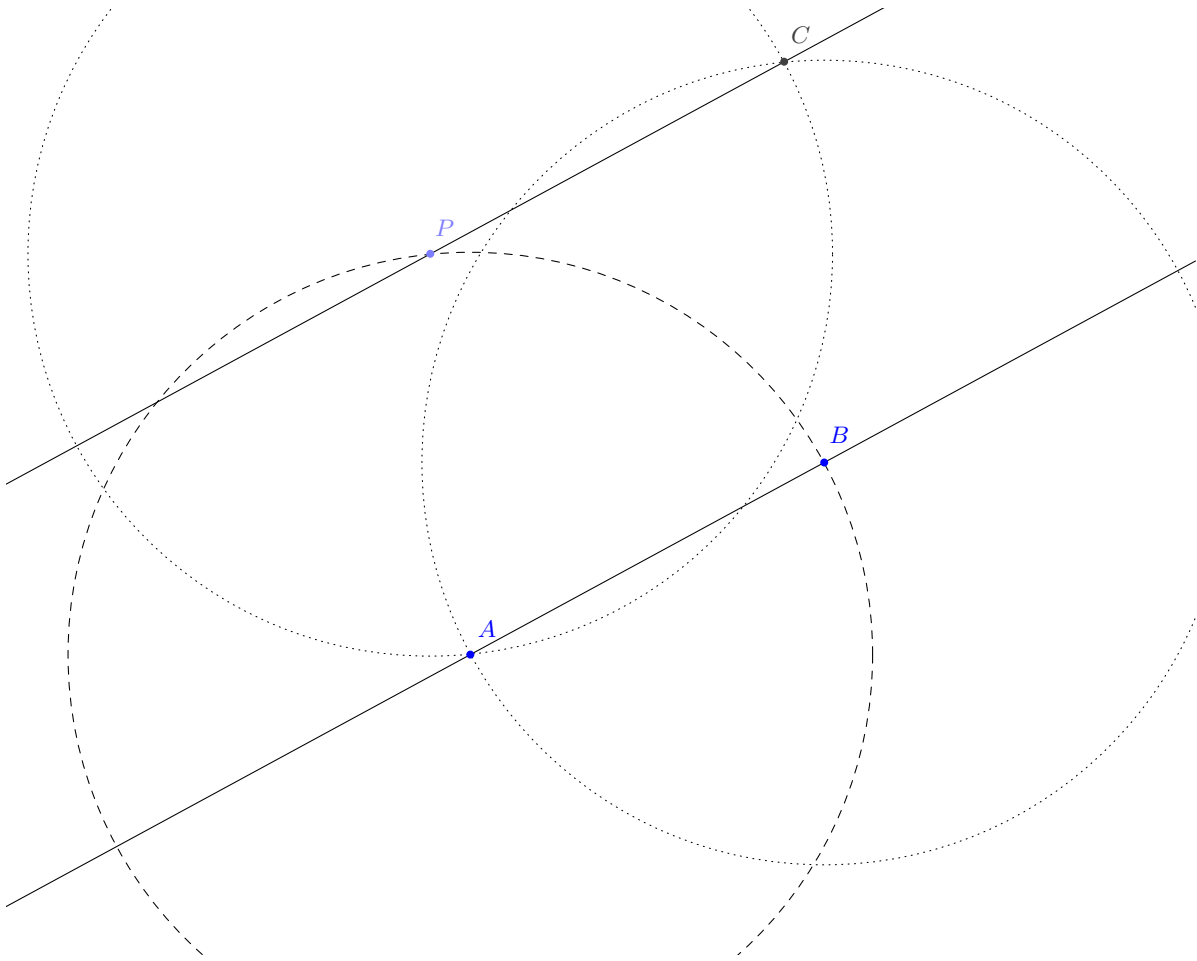


□

Remarque 1.4. Il existe une deuxième méthode pour construire une parallèle à d passant par P . C'est la méthode dite du losange, mais nous devons attendre l'étude des quadrilatères pour pouvoir la justifier.

Marche à suivre.

- (1) Choisir un point A sur d et tracer le cercle (A, r) , avec $r = \overline{AP}$. Ce cercle coupe d en deux points. Soit B l'un de ses points.
- (2) Tracer les cercles (B, r) et (P, r) . Ces cercles se coupent en A et en un point C distinct de A . La droite PC est la droite recherchée.



Attention! L'unicité de la parallèle à d passant par P n'est pas démontrable à partir des axiomes. C'est un nouvel axiome de la géométrie euclidienne.

Axiome 1.5. des parallèles. (P) Par tout point P hors d'une droite d passe au plus une parallèle.

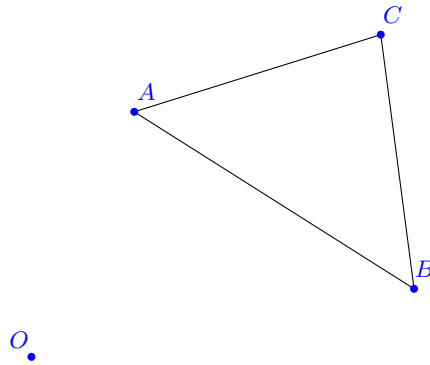
Puisque nous avons déjà montré qu'il existe au moins une parallèle, l'axiome (P) implique que cette parallèle est unique.

2. La symétrie centrale

Nous étudions dans cette section un nouveau type d'isométrie, la symétrie centrale. Plus tard nous verrons que les symétries centrales (à ne pas confondre avec les symétries axiales) sont des cas particuliers de rotations.

Proposition 2.1. *Soit O un point du plan Π . Il existe alors une unique isométrie $S_O : \Pi \rightarrow \Pi$ du plan qui fixe O et telle que le point O soit le milieu du segment $[PS_O(P)]$ pour tout point P distinct de O .*

DÉMONSTRATION. Pour construire l'image d'un point P distinct de O il suffit de tracer la demi-droite $[PO$ et de reporter la distance \overline{OP} sur la demi-droite de l'autre côté de O que P .

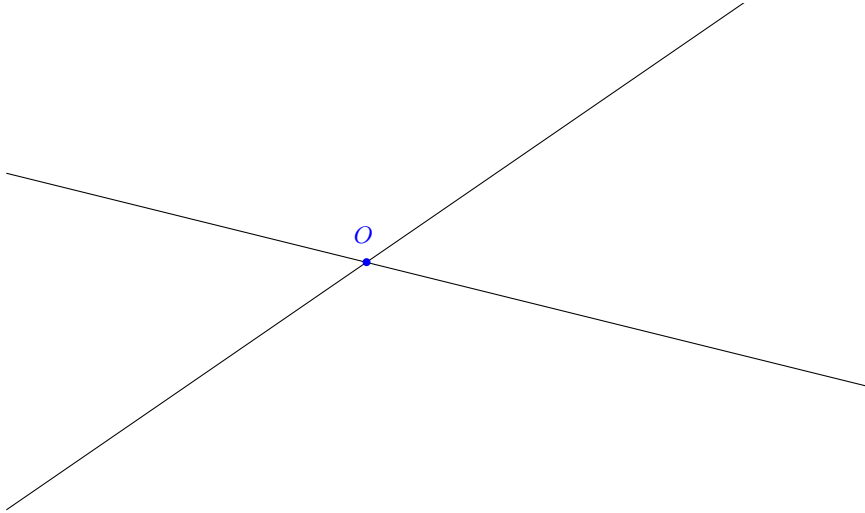


Pour démontrer qu'il s'agit bien d'une isométrie, la manière la plus élégante de faire est de remarquer que la transformation du plan décrite correspond à effectuer d'abord une symétrie axiale d'axe passant par O , puis une seconde symétrie axiale d'axe perpendiculaire au premier axe et passant par O . Vous ferez ceci en exercice.

□

Définition 2.2. L'isométrie décrite dans la proposition précédente est appelée *symétrie (centrale)* de centre O ou *demi-tour* de centre O . On dit qu'une figure F admet un *centre de symétrie* O si elle est transformée en elle-même par la symétrie de centre O . Une ligne polygonale a un centre de symétrie O si elle est transformée en elle-même, à l'ordre des sommets près, par la symétrie de centre O .

Par exemple tout point O d'une droite d est un centre de symétrie de cette droite. Le point d'intersection O de deux droites concourantes est un centre de symétrie de la croix.



Voici les propriétés essentielles de la symétrie centrale. C'est pour cette raison que l'étude du parallélisme est liée à celle des symétries centrales.

Proposition 2.3. *Toute symétrie centrale $S_O : \Pi \rightarrow \Pi$ est son propre inverse. De plus S_O transforme toute droite passant par O en elle-même et toute droite ne passant pas par le centre O en une droite qui lui est parallèle.*

DÉMONSTRATION.

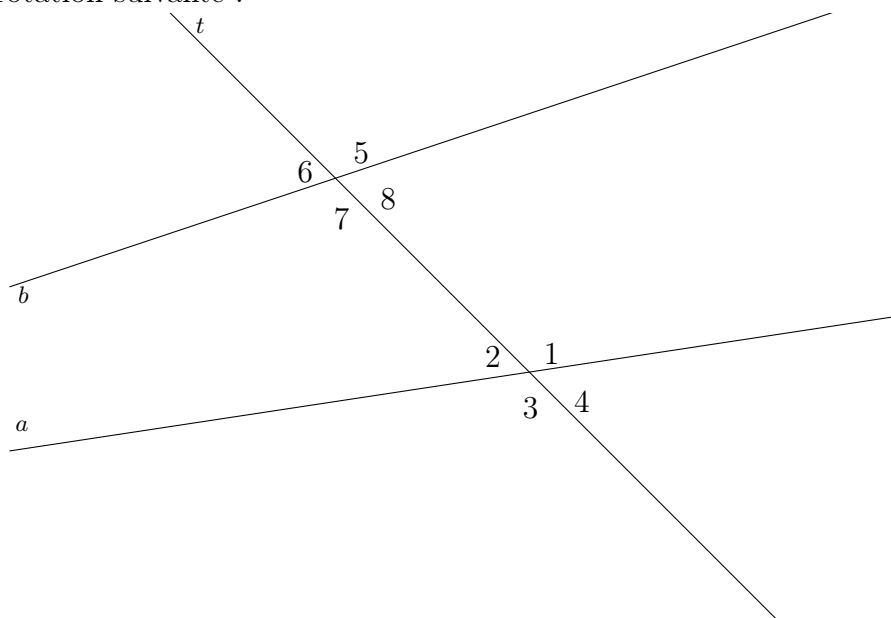


3. Le théorème de la transversale

Nous arrivons au point culminant de ce chapitre, le théorème de la transversale. Nous avons vu que des angles opposés sont isométriques. Nous allons ajouter d'autres angles à notre panoplie d'angles isométriques.

Définition 3.1. Soient a et b deux droites distinctes. Une *transversale* (relativement à a et b) est une droite t coupant a et b de sorte que a , b et t ne soient pas concourantes.

Une transversale détermine huit angles que nous allons souvent repérer grâce à la numérotation suivante :

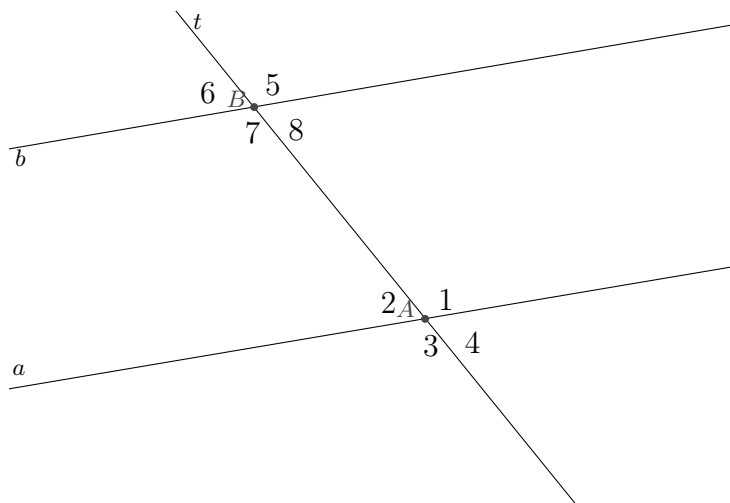


Angles *alternes-internes* : 1 et 7, 2 et 8

Angles *alternes-externes* : 3 et 5, 4 et 6

Angles *correspondants* : 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, 4 et 8

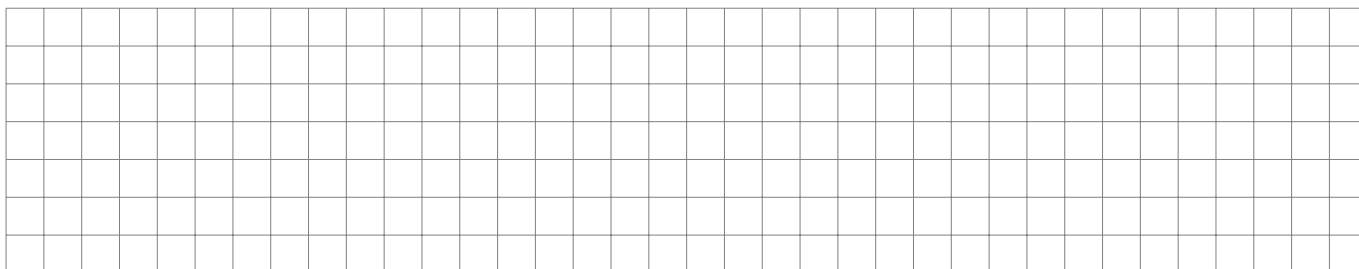
THÉORÈME 3.2. de la transversale. *Lorsqu'une transversale coupe deux parallèles, deux des huit angles sont isométriques dès qu'ils sont alternes-internes, alternes-externes ou correspondants.*



DÉMONSTRATION. Soit t une transversale coupant deux parallèles a et b en A et B respectivement.



Soit O le milieu du segment $[AB]$. On montre que O est un centre de symétrie de la figure formée des trois droites t , a et b . Comme elle transforme les angles alternes-internes et alternes-externes entre eux, on aura fini la démonstration. Le point O est un centre de symétrie de t puisque t passe par O et S_O transforme t en t . On montre maintenant que $S_O(a) = b$.



□

Il s'agit d'un « si et seulement si » dans le Théorème de la transversale. C'est-à-dire que si la conclusion du théorème est vraie, alors son hypothèse est vérifiée.

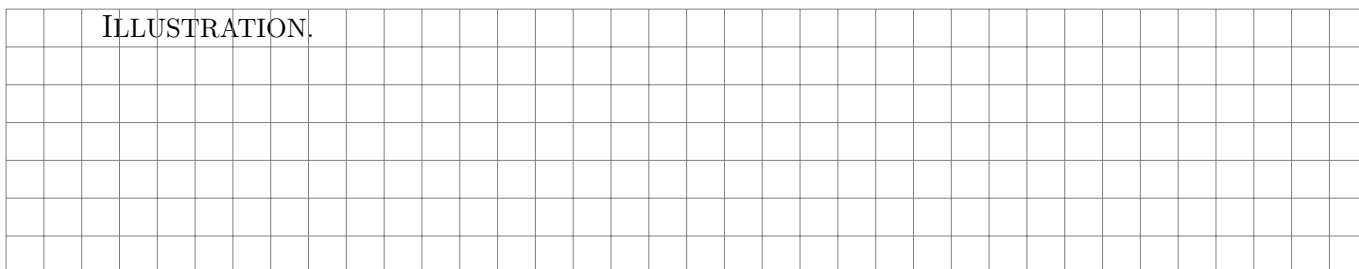
THÉORÈME 3.3. de la transversale, réciproque. *Lorsque deux droites déterminent avec une transversale deux angles alternes-internes (ou alternes-externes, ou correspondants) isométriques, elles sont parallèles.*

Ainsi, le Théorème de la transversale nous servira à connaître certains angles lorsqu'ils se trouvent en position alterne-interne, etc. pour une paire de droites parallèles, alors que la réciproque nous permettra de savoir que deux droites sont parallèles si les angles alternes-internes sont isométriques par exemple. Pour terminer nous faisons une observation apparemment anodine sur les transversales de deux droites parallèles. Nous en aurons besoin plus tard.

Proposition 3.4. *Toute droite coupant l'une de deux parallèles coupe aussi l'autre.*

DÉMONSTRATION. Soient a et b des droites parallèles, d une droite coupant a en A (en particulier, $a \neq d$). Prouvons que d coupe b . La droite d ne peut pas être parallèle à b , car par l'axiome des parallèles, il existe une unique parallèle à b passant par A et ce doit donc être a . De plus, la droite d ne peut pas être confondue avec la droite b , car la droite d contient le point A , tandis que la droite b non (car elle est parallèle à a par hypothèse). □

ILLUSTRATION.

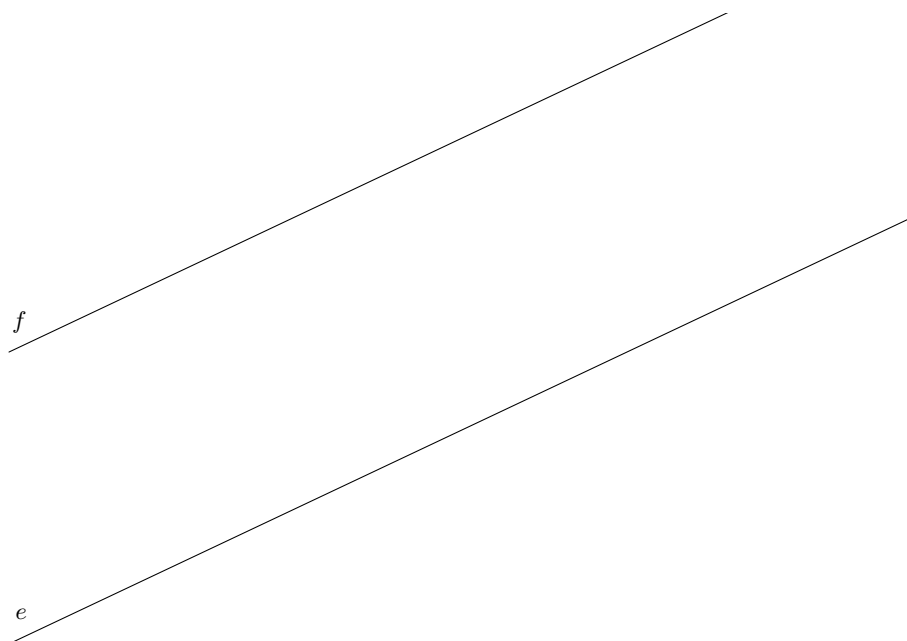


4. Propriétés des parallèles

Nous verrons en particulier une caractérisation des parallèles en tant que lieu géométrique.

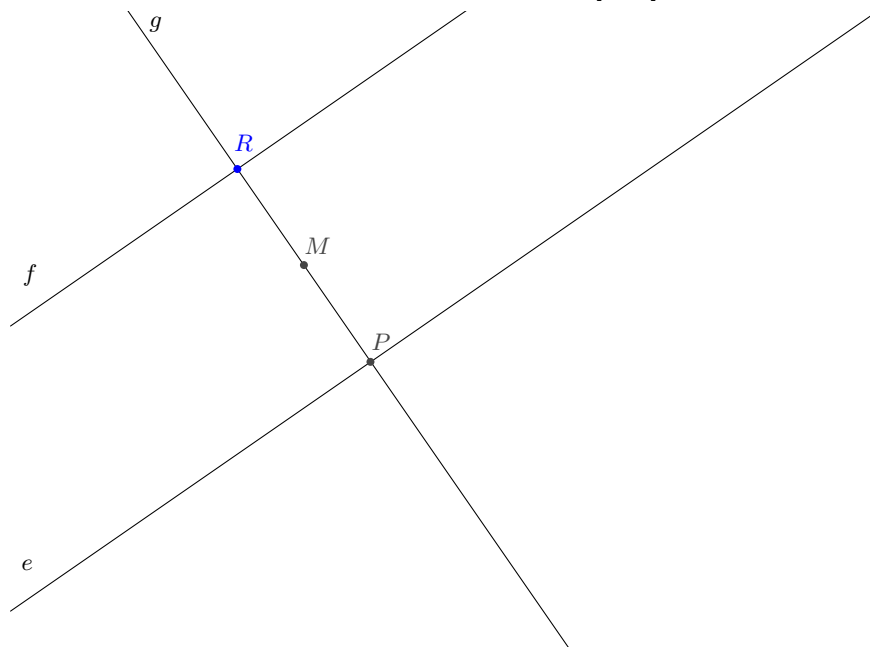
Proposition 4.1. *Soient deux droites parallèles. Toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

DÉMONSTRATION. Soient e et f deux droites parallèles et g une droite perpendiculaire à e . Deux droites perpendiculaires se coupent toujours.



Remarque 4.2. Une preuve alternative et plus courte utilise le résultat de la série précédente que les isométries préservent la perpendicularité. Elle commence de la

même manière. Soient e et f deux droites parallèles et g une droite perpendiculaire à e . Deux droites perpendiculaires se coupent toujours, si bien que la droite g coupe la droite e en un point P . Par la proposition précédente, la droite g coupe aussi la droite f , disons en R . Soit M le milieu du segment $[PR]$.



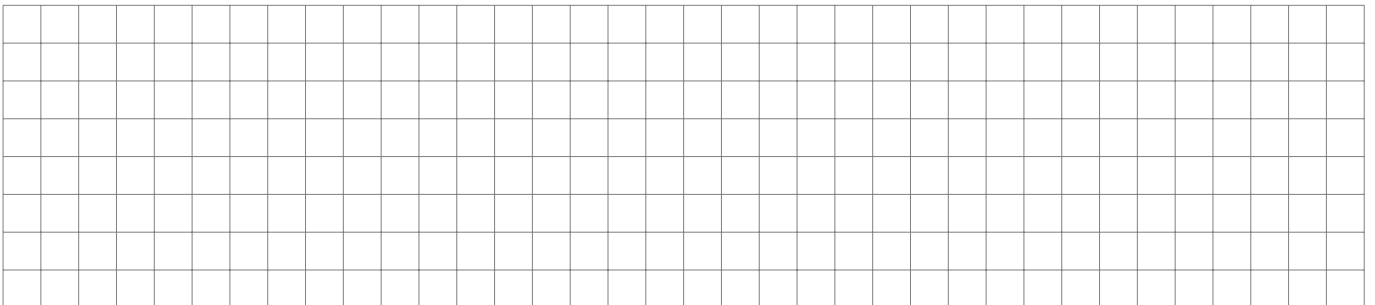
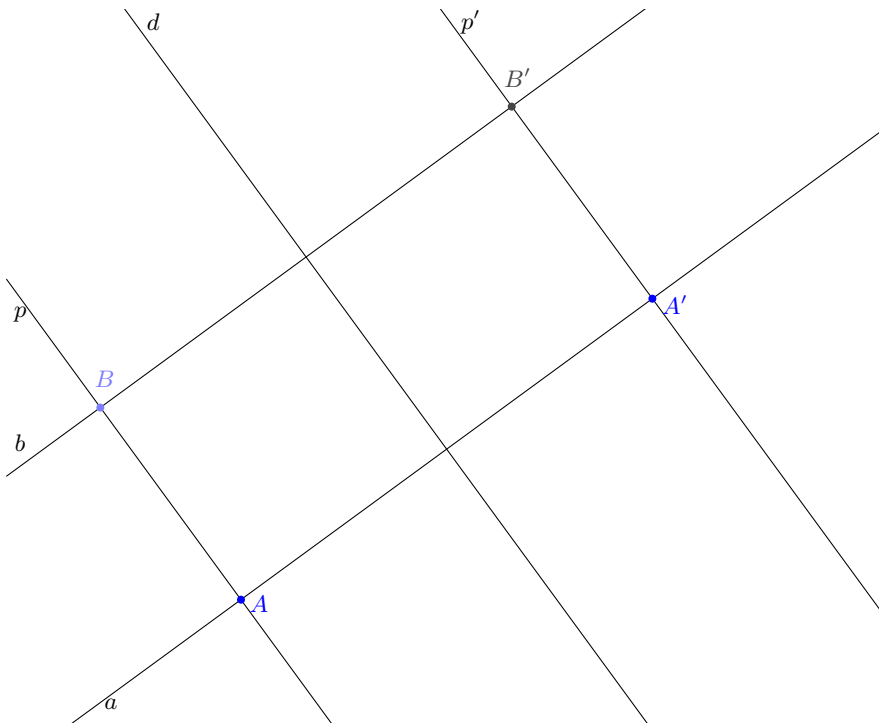
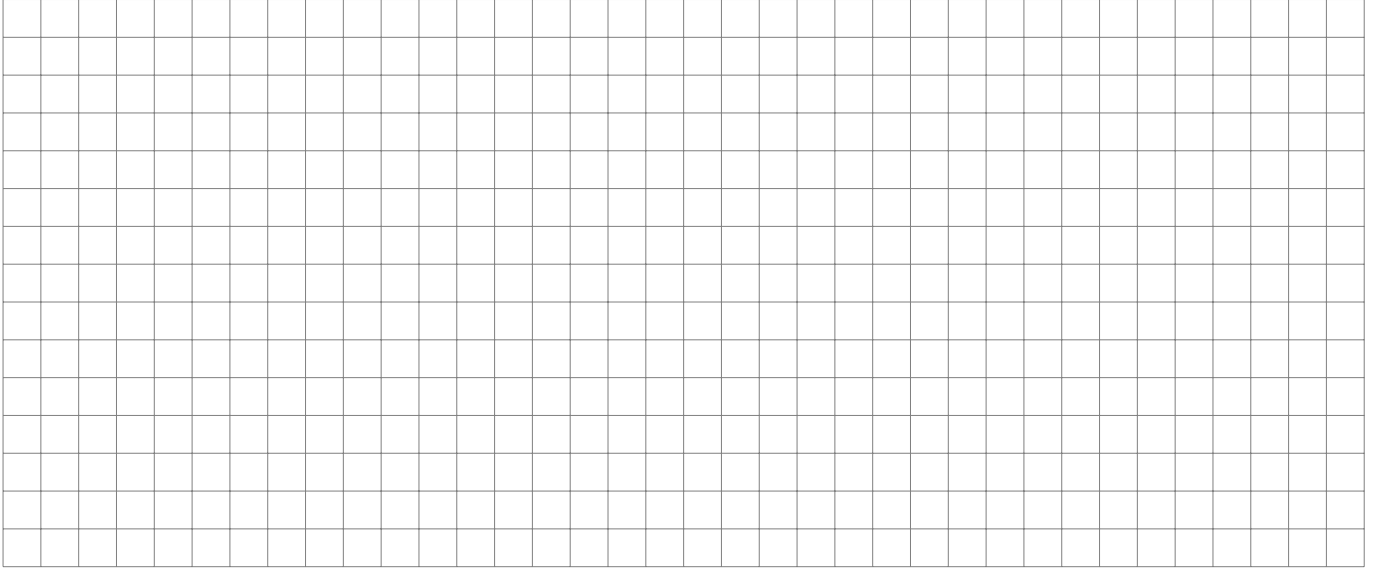
La symétrie de centre M transforme la croix eg en la croix fg . En effet, par une proposition précédente, la droite g est préservée car elle contient M et la droite e est transformée en une droite qui lui est parallèle, passant par R ; c'est donc f par l'axiome des parallèles. Comme les isométries préservent la perpendicularité, la croix fg est droite.

La définition de parallèle ne fait pas intervenir la notion de distance, on ne demande aux deux droites que d'être disjointes, de n'avoir aucun point en commun. Nous démontrons maintenant une propriété qui décrit presque la parallèle comme un lieu géométrique.

Proposition 4.3. *Soient a et b deux droites parallèles. Tous les points de a sont à égale distance de b . De même, tous les points de b sont à égales distance de a . De plus, ces deux distances sont égales.*

DÉMONSTRATION. Soient a et b des droites parallèles et A et A' deux points distincts sur a . Nous allons démontrer que la distance de A à b est la même que celle de A' à b . Puisque le rôle des droites a et b n'a pas d'importance, cela démontrera la proposition.

Soient p et p' les perpendiculaires à a passant par A et A' respectivement. Soit d la médiatrice du segment $[AA']$.

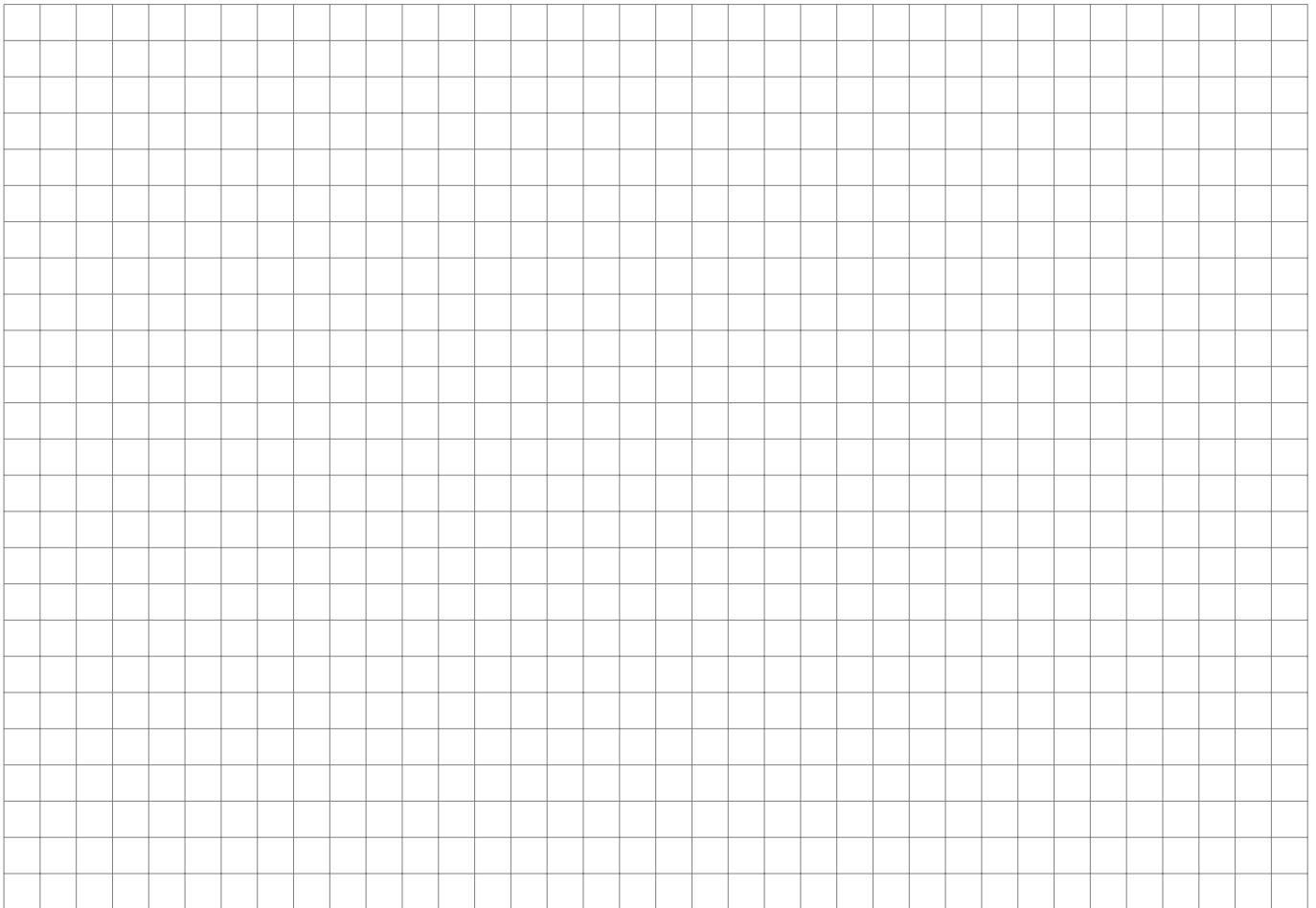


Cette proposition justifie la définition suivante puisque les choix à faire n'ont aucune influence sur le résultat.

Définition 4.4. La *distance de deux parallèles* est la distance de n'importe quel point d'une des droites à l'autre droite.

Nous arrivons enfin à la description du lieu géométrique. Observons que l'on ne décrit pas une parallèle, mais deux !

Proposition 4.5. *Il existe exactement deux parallèles à une distance $r > 0$ donnée d'une droite d donnée. De plus, ces deux droites sont le lieu géométrique des points du plan qui sont à la distance r de la droite d .*



La mesure des angles

La mesure des distances a été fixée par des axiomes. Nous verrons dans ce chapitre que la possibilité de mesurer des angles en découle, il n'est pas nécessaire d'ajouter un axiome supplémentaire. Pour ce faire nous révisons rapidement la terminologie utilisée pour les angles rectilignes et l'adaptions au contexte des angles plans car ce sont eux que nous pouvons mesurer. En effet un angle rectiligne détermine deux angles plans distincts, de mesures distinctes. Nous démontrerons ensuite le fameux théorème de la somme des angles d'un triangle et étendrons ce résultat aux polygones simples.

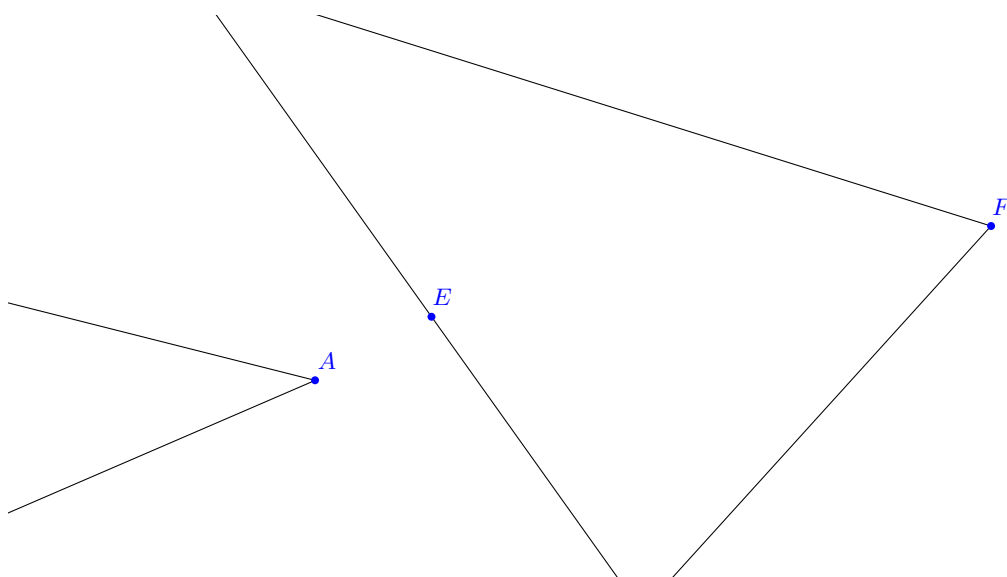
1. Terminologie sur les angles-plan

En général, la terminologie des angles rectilignes s'applique aux angles-plans *saillants*, non pas rentrants.

Définition 1.1. L'angle rectiligne d'un angle-plan est appelé sa *frontière*. L'*intérieur* d'un angle-plan est l'angle-plan sans sa frontière.

L'intérieur d'un angle-plan saillant non plat est l'intérieur de sa frontière. L'intérieur d'un angle-plan plat est le demi-plan ouvert qu'il détermine. L'intérieur d'un angle-plan rentrant est l'extérieur de sa frontière.

En général, on définit qu'un angle-plan vérifie une certaine propriété des angles rectilignes si et seulement il est saillant et que sa frontière la vérifie. Ainsi, un angle-plan est *nul*, *plat*, *droit*, *aigu* ou *obtus* si c'est un angle-plan saillant dont la frontière est un angle rectiligne respectivement nul, plat, droit, aigu ou obtus. Un angle-plan est dit *plein* si c'est un angle-plan rentrant dont la frontière est un angle rectiligne nul. Colorie ou hachure les intérieurs des angles plans ci-dessous sachant que celui de sommet A est saillant et celui de sommet F est rentrant.



Ce n'est pas suffisant de dire que deux angles-plans saillants sont adjacents si et seulement si leurs frontières le sont. Il faut encore préciser la position relative des intérieurs. Ainsi, deux angles-plans sont dits *adjacents* si leurs frontières sont adjacentes et si leurs intérieurs sont disjoints. La *somme* de deux angles-plans adjacents α et β , notée $\alpha + \beta$, est l'angle-plan formé de la réunion des deux angles.

On dit que deux angles-plans saillants sont adjacents-supplémentaires si et seulement si leurs frontières sont des angles adjacents-supplémentaires. En effet, ils sont automatiquement d'intérieur disjoint dans ce cas.

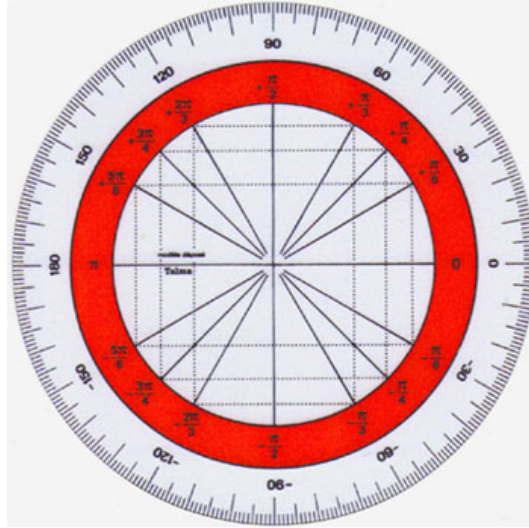
Définition 1.2. Deux angles-plans sont *adjacents-supplémentaires*, resp. *supplémentaires* s'ils sont saillants et si leurs frontières sont des angles adjacents-supplémentaires, resp. supplémentaires.

Définition 1.3. Deux angles rectilignes sont *adjacents-complémentaires* s'ils sont adjacents et que les côtés non confondus forment un angle droit. Ils sont *complémentaires* s'il existe une isométrie qui transforme le premier en un angle adjacent-complémentaire au deuxième.

Définition 1.4. Deux angles-plans sont *adjacents-complémentaires*, resp. *complémentaires* s'ils sont saillants et que leurs frontières sont des angles adjacents-complémentaires, resp. complémentaires.

2. Les degrés

Si la mesure des distances se fait avec une règle graduée, la mesure des angles se fait avec un rapporteur, c'est-à-dire un cercle gradué. Nous reviendrons à cette question l'année prochaine, lorsque vous étudierez le nombre π . Voici un rapporteur étalonné en degrés et en radians :

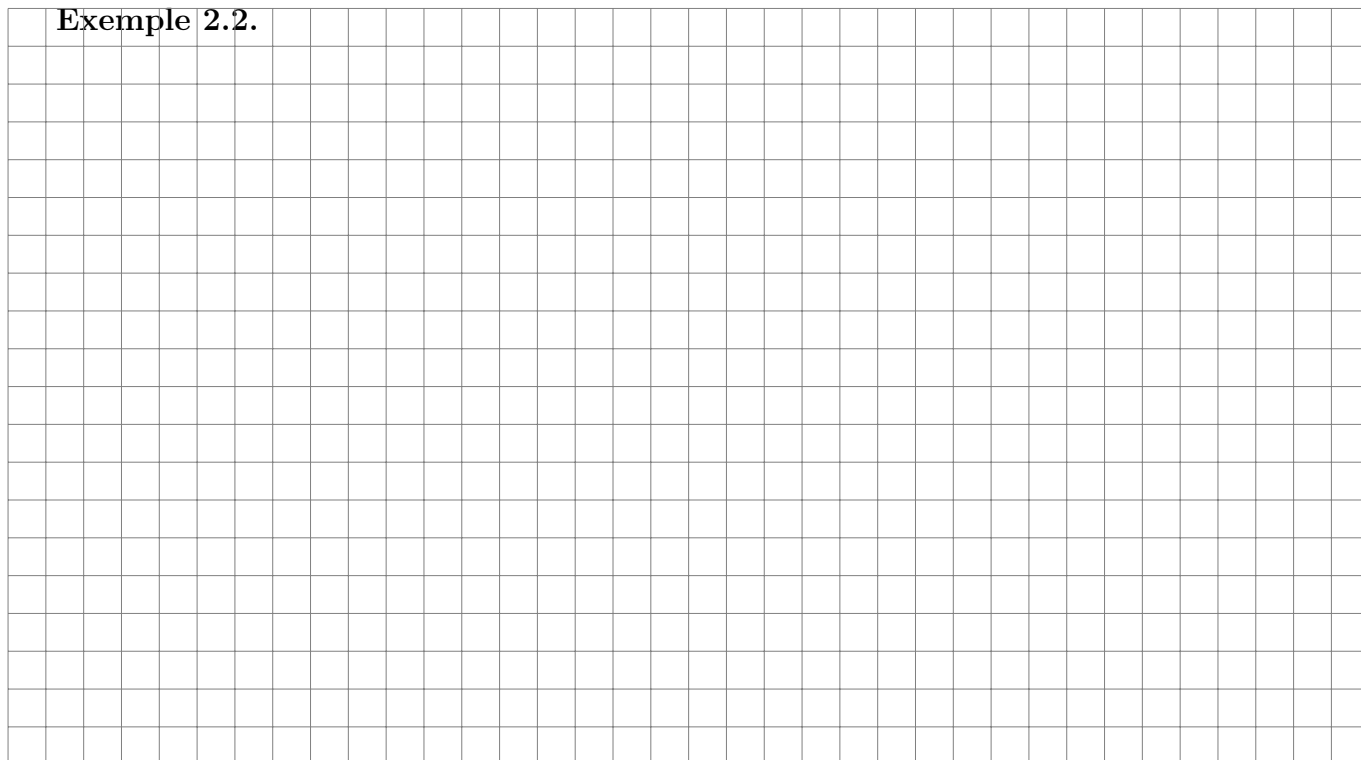


Proposition 2.1. *Il existe une unique manière de faire correspondre à tout angle-plan α un nombre réel $m(\alpha)$, appelé la mesure de α , tel que :*

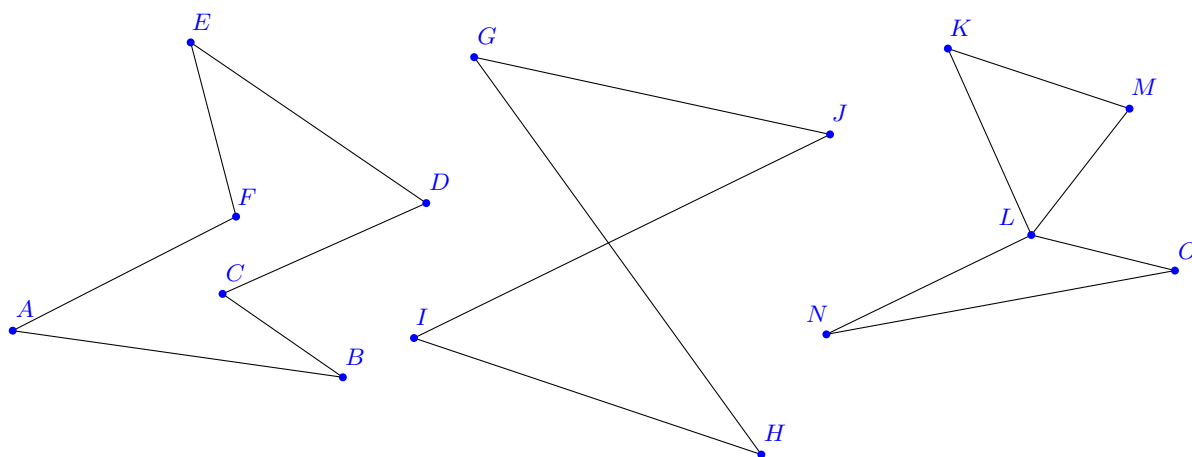
- (1) $0 \leq m(\alpha) \leq 2 \cdot 180 = 360$.
- (2) $m(\alpha) = m(\beta) \iff \alpha$ est isométrique à β .
- (3) $m(\alpha) + m(\beta) = 180 \iff \alpha$ et β sont supplémentaires.
- (4) $m(\alpha + \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$ si α et β sont adjacents.

Le choix du nombre 180 est arbitraire (parmi les nombres strictement positifs). La mesure associée à ce choix est dite *mesure en degrés*. Si dans cette définition on remplace le nombre 180 par 200 ou par π , on obtient respectivement la mesure en *grades* et en *radians*. Le nombre π est défini comme étant la longueur du demi-arc de cercle de rayon 1. Il vaut environ 3,141592654, mais ce n'est pas un nombre rationnel.

Pour indiquer que l'on travaille en degrés, on place le symbole $^\circ$ après le nombre. S'il n'y a pas de risque de confusion, on notera de la même manière un angle et sa mesure. Par exemple, si l'angle α a une mesure de 30° , on notera $\alpha = 30^\circ$. Sur la base des propriétés élémentaires décrites dans la proposition, faisons quelques calculs.

Exemple 2.2.**3. Les polygones simples**

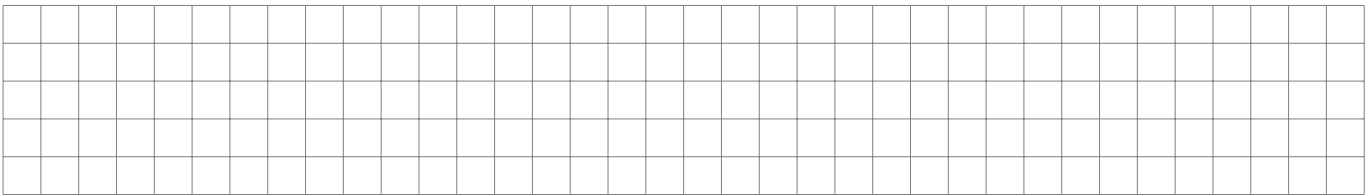
Un polygone est une ligne polygonale qui se termine là où elle a commencé. Nous avons introduit la notation $A_0A_1A_2 \dots A_n$ pour un tel objet. On ne note que les sommets A_0, A_1 , etc. et on sous-entend que le polygone est aussi constitué des segments $[A_0A_1], [A_1, A_2]$ etc.



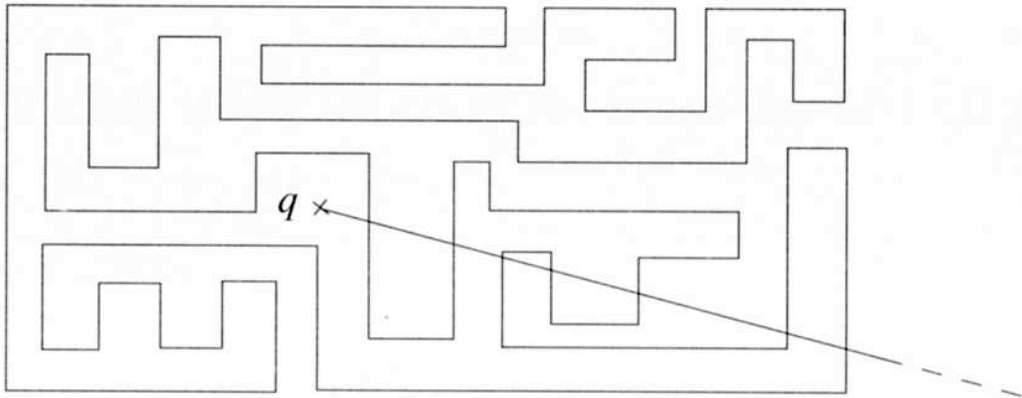
Définition 3.1. Un polygone est *simple* si chacun de ses points satisfait à l'une ou l'autre de ces conditions :

- (1) Ce point est un sommet et il n'appartient qu'à deux côtés.
- (2) Ce point n'appartient qu'à un seul côté.

Dans la suite, sauf mention du contraire, tous les polygones seront supposés *simples*. Parmi les polygones ci-dessus, lesquels sont simples ?



Définition 3.2. Soit F un polygone. Un point P du plan est à l'*intérieur* de F s'il n'est pas sur F et si toute demi-droite issue de P qui évite les sommets de F intersecte un nombre impair de côtés de F . L'ensemble des points intérieurs du polygone est l'*intérieur* de F . On appelle *surface polygonale* la réunion d'un polygone et de son intérieur.



Le point q est-il à l'intérieur ou à l'extérieur du polygone? Colorie l'intérieur pour mieux visualiser la surface polygonale associée à ce polygone.

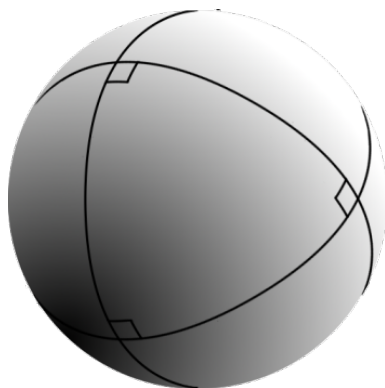
Définition 3.3. Soit F un polygone et A un sommet de F . L'*angle en* A du polygone F est l'angle-plan dont les côtés sont les supports des côtés de F issus de A et qui intersecte l'intérieur du polygone.



Remarque 4.2. Ce théorème utilise implicitement l'axiome des parallèles, car on l'a prouvé via le Théorème de la Transversale, qui lui-même est prouvé via l'axiome des parallèles. En fait, l'axiome des parallèles est équivalent à l'affirmation que la somme des angles d'un triangle vaut 180° . Autrement dit, on pourrait prendre cette affirmation comme axiome et en dériver, cette fois comme théorème, l'« axiome » des parallèles.

Remarque 4.3. En géométrie sphérique, l'axiome des parallèles n'est pas vérifié : il n'y a pas de parallèle passant par un point hors d'une droite. Ceci peut paraître

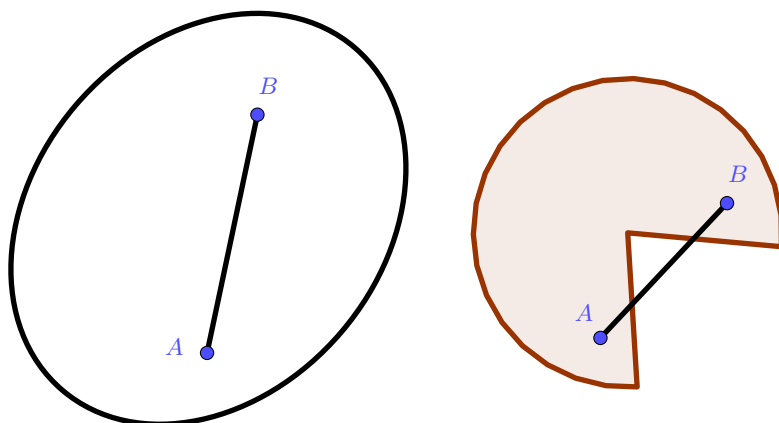
contradictoire avec le fait (qui est une proposition, pas un axiome) qu'il existe *au moins une* parallèle passant par un point hors d'une droite. Mais cette proposition est basée sur tous les axiomes de la géométrie euclidienne, qui sont partiellement faux en géométrie sphérique. En géométrie sphérique, la somme des angles d'un triangle vaut toujours plus que 180° . Voici un exemple de triangle dont la somme des angles vaut trois angles droits !



5. Somme des angles d'un polygone

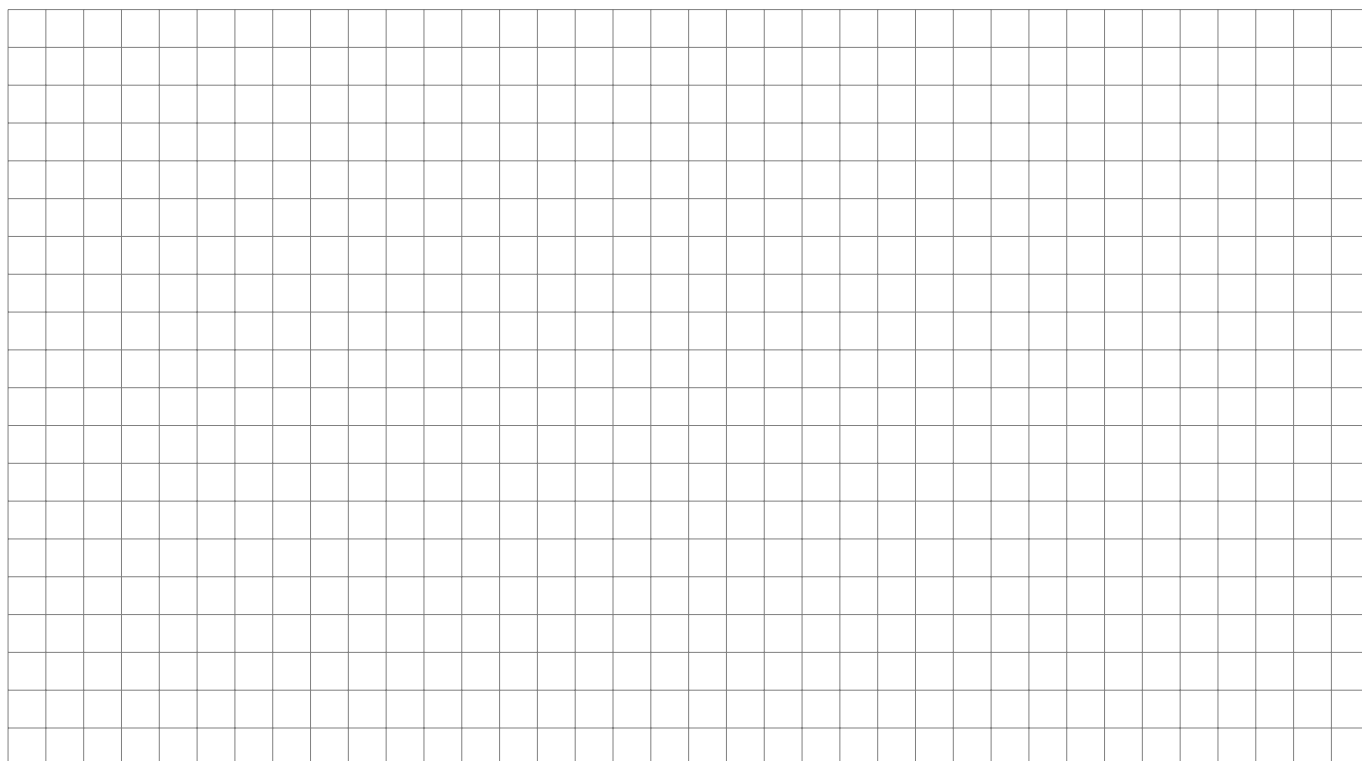
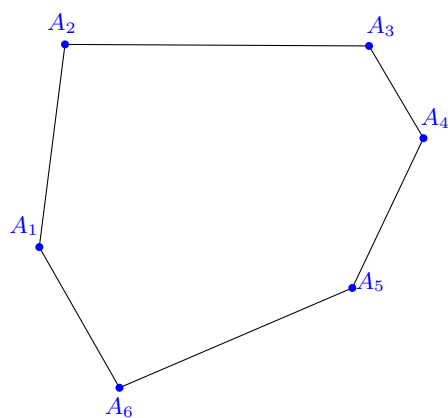
Pour généraliser le théorème de la somme des angles d'un triangle nous devons nous restreindre au cas des polygones simples. De fait nous ne ferons la preuve que dans le cas des polygones simples et convexes, même si cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire.

Définition 5.1. Une figure F du plan est *convexe* si pour toute paire de points distincts A et B de F , le segment $[AB]$ est inclus dans F . Par abus de langage, on dit qu'un polygone est convexe lorsque la surface polygonale associée est convexe.



Corollaire 5.2. *Soit F un polygone convexe à n côtés. Alors la somme des mesures des angles de F vaut $(n - 2) \cdot 180^\circ$.*

DÉMONSTRATION. Soient A_1, A_2, \dots, A_n les n sommets de F . Considérons les segments $[A_1A_i]$ pour chaque sommet A_i du polygone avec $i = 3, \dots, n - 1$. Comme F est convexe, ces segments sont entièrement contenus dans la surface polygonale associée à F . Ceci découpe la surface polygonale en $n - 2$ triangles d'intérieurs disjoints (sans preuve).



Remarque 5.3. Ce corollaire est en fait vrai de manière plus générale pour tous les polygones simples. La preuve est cependant plus difficile dans le cas général. Il faut montrer que tout polygone simple admet une *triangulation*, i.e. un découpage en triangles par les diagonales du polygone seulement, et que cette triangulation consiste en $n - 2$ triangles.

Classification des isométries

Nous terminons le premier fascicule de géométrie avec la classification des isométries. Nos isométries de base sont les symétries axiales et nous verrons que *toutes* les isométries peuvent être décrites en ne faisant appel qu'à ces symétries. Nous avons déjà vu en exercice qu'une symétrie centrale est la composition de deux symétries axiales, ce résultat paraît donc assez naturel. Par contre nous montrerons qu'en effectuant au plus trois réflexions l'une après l'autre on obtient n'importe quelle isométrie du plan !

1. Le groupe des isométries

Nous allons étudier les isométries en les comparant aux isométries les plus élémentaires, celles que nous avons utilisées pour énoncer les axiomes de la géométrie euclidienne : les symétries axiales. Pour construire des isométries plus compliquées on peut composer des isométries élémentaires, un peu comme les nombres entiers se décomposent en produits de premiers.

Définition 1.1. Si $f, g: \Pi \rightarrow \Pi$ sont deux transformations du plan, leur *composée* $g \circ f$ est aussi une transformation du plan, définie par $(g \circ f)(P) = g(f(P))$.

On compose deux transformations en effectuant l'une d'abord, puis l'autre après.

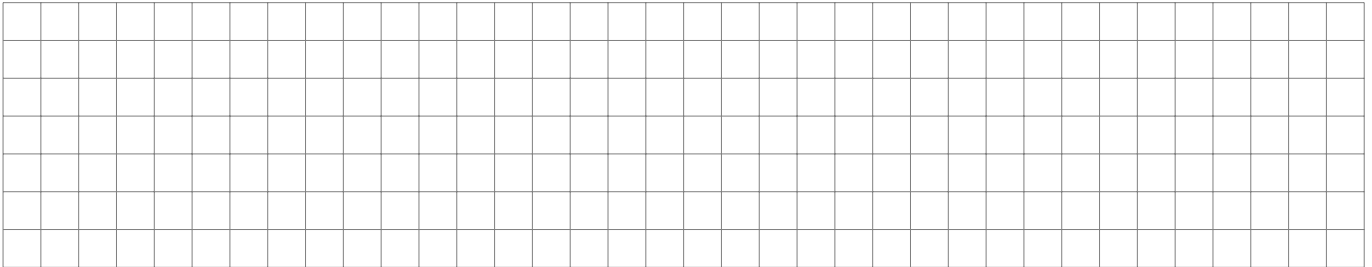
Proposition 1.2. *La composée de deux isométries est une isométrie.*



Définition 1.3. Un *groupe* est un ensemble G , muni d'une opération (loi de composition interne) $\star : G \times G \rightarrow G$ qui associe à deux éléments $a, b \in G$ un élément $a \star b \in G$, et d'un *élément neutre* $e \in G$ vérifiant les axiomes suivantes :

- (1) (Associativité) Pour tous $a, b, c \in G$, on a l'égalité $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
- (2) (Élément neutre) Pour tout $a \in G$, on a l'égalité $a \star e = a = e \star a = a$;
- (3) (Inverse) Pour tout $a \in G$, il existe un élément $a^{-1} \in G$ tel que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Exemple 1.4. Nous connaissons déjà des exemples de nature algébrique.



Proposition 1.5. *L'ensemble des isométries du plan forme un groupe pour la composition, d'élément neutre la transformation identité Id .*

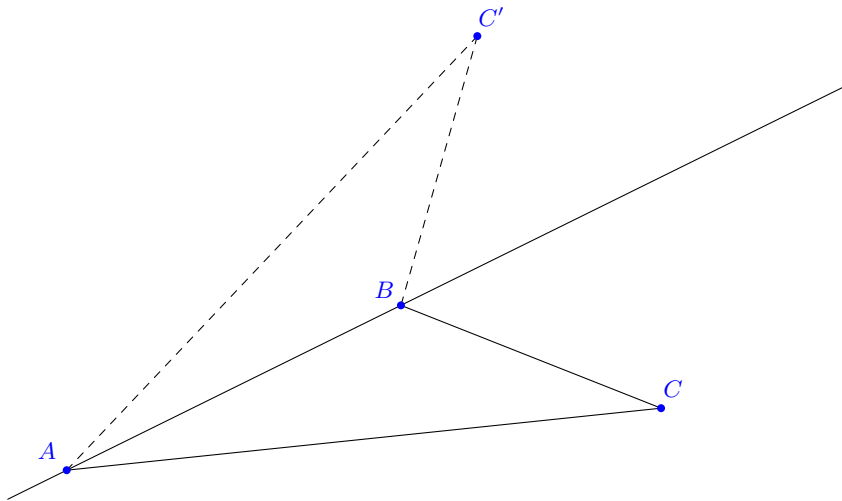
DÉMONSTRATION. Nous étudierons la composition de transformations, de fonctions et d'applications en général dans le prochain thème et verrons qu'elle est associative. L'élément neutre est clairement l'identité puisque la transformation identité fixe tous les points du plan. Enfin, nous avons vu qu'une isométrie f est injective et surjective. Cela signifie que pour tout point $P \in \Pi$, il existe un seul point Q du plan tel que $f(Q) = P$. On définit alors la transformation $f^{-1} : \Pi \rightarrow \Pi$ en posant $f^{-1}(P) = Q$. Cette transformation est une isométrie parce que f en est une et par définition $f^{-1} \circ f = Id = f \circ f^{-1}$. \square

2. Composition de symétries

Notre programme est de montrer que l'image par une isométrie de trois points non alignés détermine complètement cette isométrie, puis de voir que cela nous permet de construire toute isométrie en trois coups (de miroir).

Lemme 2.1. *Une isométrie qui laisse fixe les sommets d'un triangle laisse fixe tout le plan (c'est donc l'identité).*

DÉMONSTRATION. Soit $\triangle ABC$ un triangle et f une isométrie. Supposons que f laisse fixe les trois points A , B et C . Comme f laisse fixe les points A et B (qui sont distincts), elle laisse fixe tous les points de la droite AB (car les isométries envoient les droites sur des droites, et par les axiomes de la distance, notamment (D4) qui dit que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si le troisième point se trouve entre A et B).

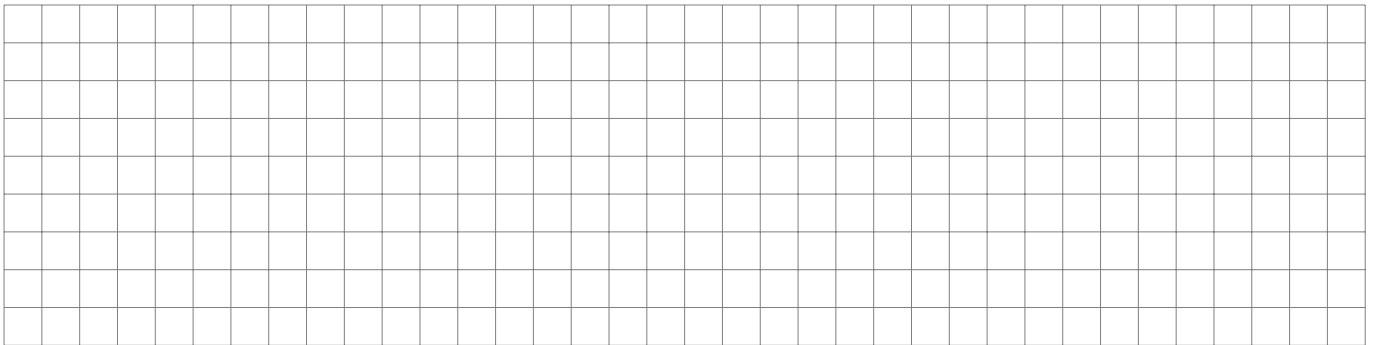
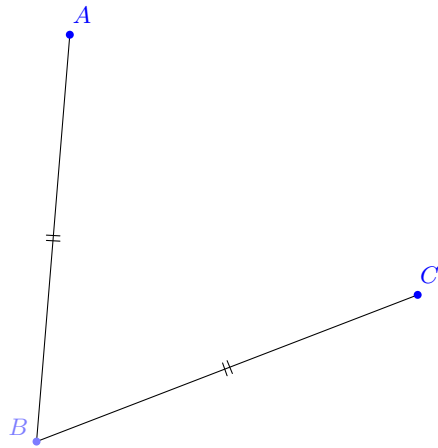


Par l'axiome de symétrie, il n'existe que deux isométries laissant fixes les points de la droite AB : l'identité et la réflexion d'axe AB et f doit être l'une ou l'autre. Par définition d'un triangle, le point C ne se trouve pas sur la droite AB et donc S_{AB} ne le laisse pas fixe (il est envoyé de l'autre côté de AB). Donc f doit être l'identité. \square

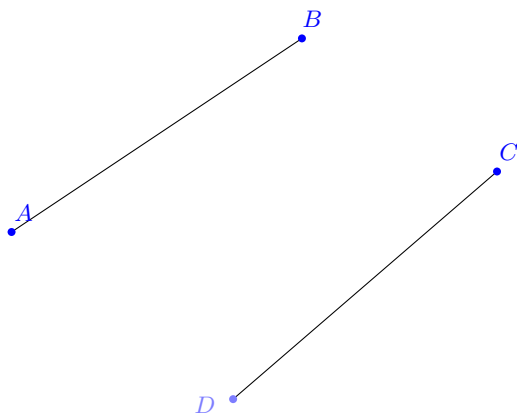
Convention 2.2. Dans la suite, pour simplifier le langage, on dira que deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques s'ils sont isométriques sous une isométrie qui transforme A en A' , B en B' et C en C' . L'ordre des sommets est donc important et souvent leurs noms nous permettra de savoir quel ordre nous choisissons !

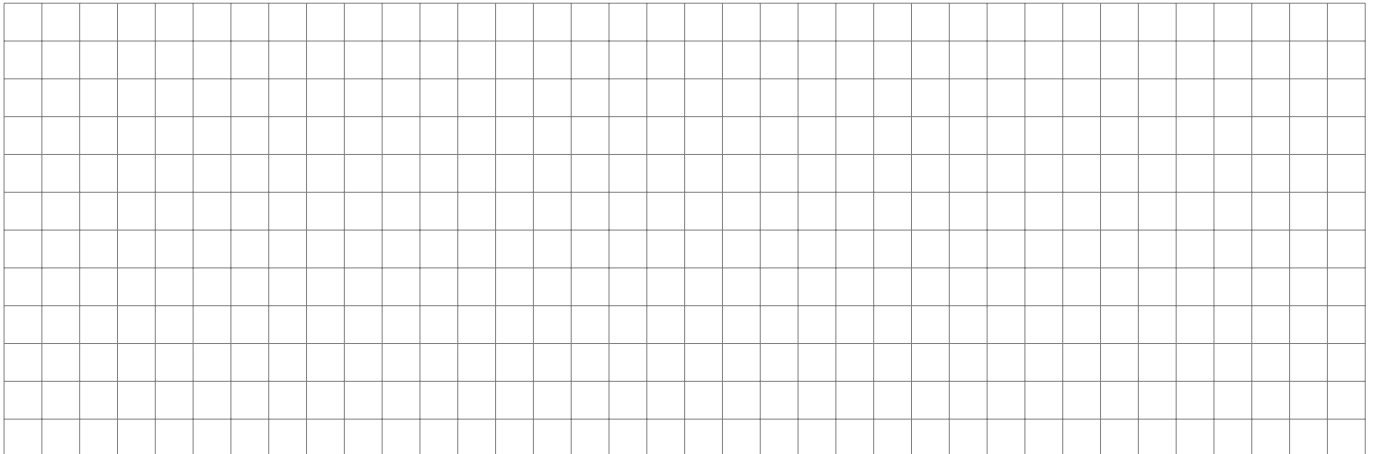
Lemme 2.3. Soient ABC et $A'B'C'$ des triangles isométriques. Alors il existe une unique isométrie qui transforme A en A' , B en B' et C en C' .

DÉMONSTRATION. Nous commençons par montrer l'existence d'une telle isométrie et la construisons comme composition d'au maximum deux symétries axiales. Si $A = C$ et $B = D$, alors l'identité est une telle isométrie. Supposons maintenant que $A = C$ ou $B = D$, mais pas les deux, (disons $A \neq C$).

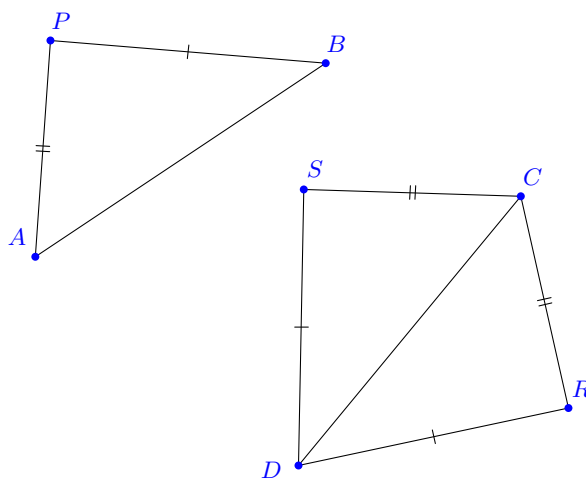


Si $A \neq C$ et $B \neq D$, alors on fait en sorte de se retrouver dans l'une ou l'autre des situations précédentes.



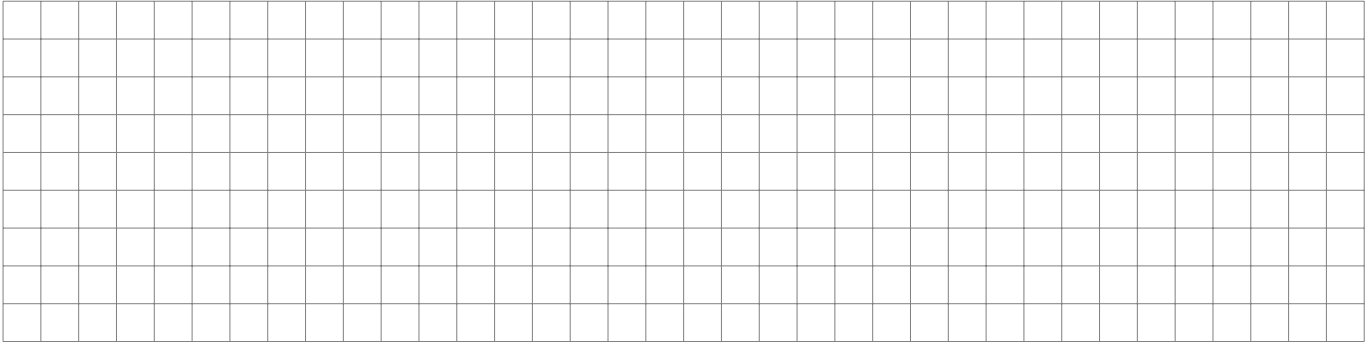


Nous devons maintenant prouver qu'il existe exactement deux telles isométries. Prenons un point P qui n'est pas sur la droite AB de sorte à former un triangle $\triangle ABP$. Les hypothèses de l'axiome de construction d'un triangle s'appliquent pour la base $[CD]$ et les longueurs \overline{AP} et \overline{BP} . Il existe donc exactement deux triangles $\triangle CDR$ et $\triangle CDS$ avec $\overline{AP} = \overline{CR} = \overline{CS}$ et $\overline{BP} = \overline{DR} = \overline{DS}$.



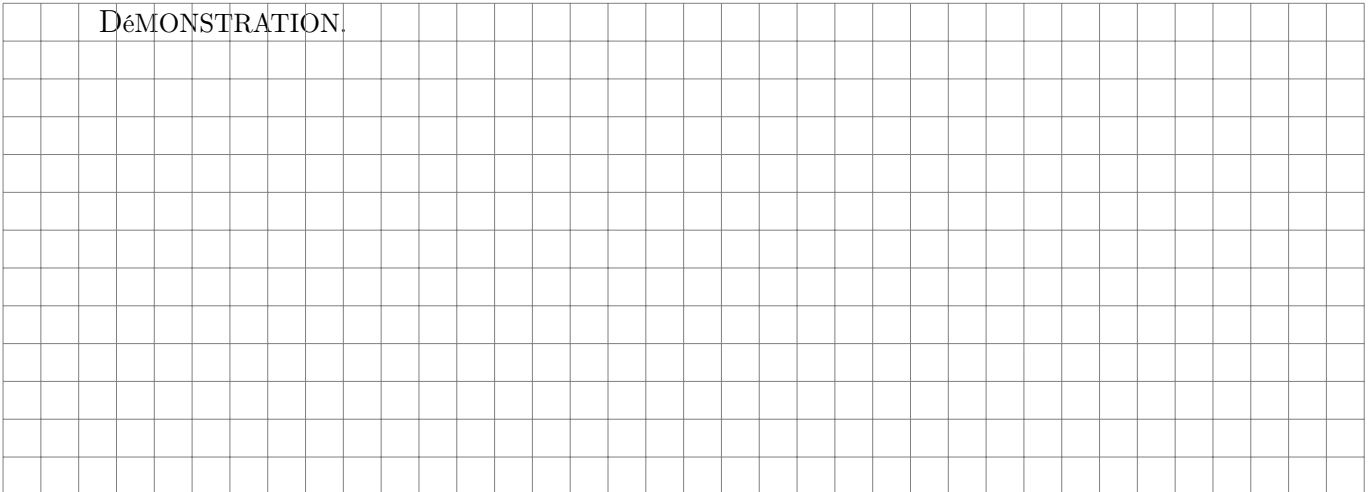
Soit f une isométrie qui transforme $[AB]$ en $[CD]$. Alors f transforme P en un point P' vérifiant les mêmes propriétés que R et S . Par l'axiome de construction des triangles, P' doit être égal à R ou S . Si f transforme P en R , alors la composée $S_{DC} \circ f$ avec la réflexion d'axe DC transforme P en S . De plus, c'est aussi une isométrie qui transforme $[AB]$ en $[CD]$ et elle est distincte de f .

Ainsi, on sait qu'il existe au moins deux isométries transformant A en C et B en D . Montrons maintenant qu'il n'en existe pas plus. On vient de voir que toute isométrie qui transforme $[AB]$ en $[CD]$ transforme le triangle $\triangle ABP$ soit en $\triangle CDR$ soit en $\triangle CDS$.



THÉORÈME 2.6. de classification des isométries du plan. *Toute isométrie peut-être obtenue par la composée d'au plus trois réflexions (0, 1, 2 ou 3).*

DÉMONSTRATION.



3. Les rotations

Comme illustration du Théorème de classification nous étudions les rotations. Nous souhaitons donc comprendre en particulier comment une rotation se décompose en produit de symétries. Pour commencer nous devons donner une définition précise et rigoureuse de ce qu'est une rotation.

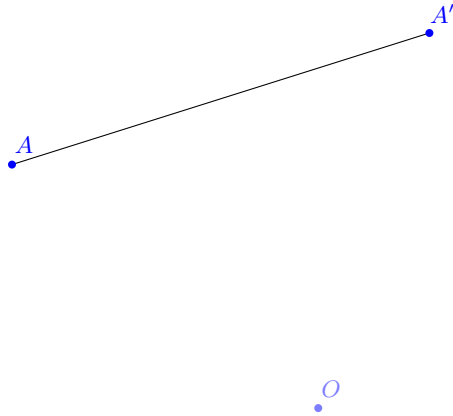
Définition 3.1. Une *rotation* est une isométrie qui, soit est l'identité (la *rotation triviale* ou *nulle*), soit fixe un unique point O du plan (*rotation non triviale*). Ce point O s'appelle le *centre* de la rotation. N'importe quel point peut être considéré comme le centre de la rotation nulle.

Exemple 3.2. Une symétrie centrale de centre O est une rotation de centre O . Une réflexion n'est pas une rotation car elle fixe toute une droite.

Par *définition* une rotation est une isométrie qui n'a qu'un seul point fixe. Le Théorème de classification des isométries garantit que les rotations peuvent s'exprimer comme composition de réflexions (au plus trois). Combien de réflexions faut-il et quelle est la position relative des axes ?

Proposition 3.3. *Une isométrie est une rotation si et seulement si c'est la composée de deux réflexions d'axes ayant au moins un point commun.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{R} une rotation. Si c'est l'identité, alors elle est la composée $S_a \circ S_a$ pour n'importe quelle droite a . Sinon, soient O son centre et A un point du plan. Soit $A' = \mathcal{R}(A)$.

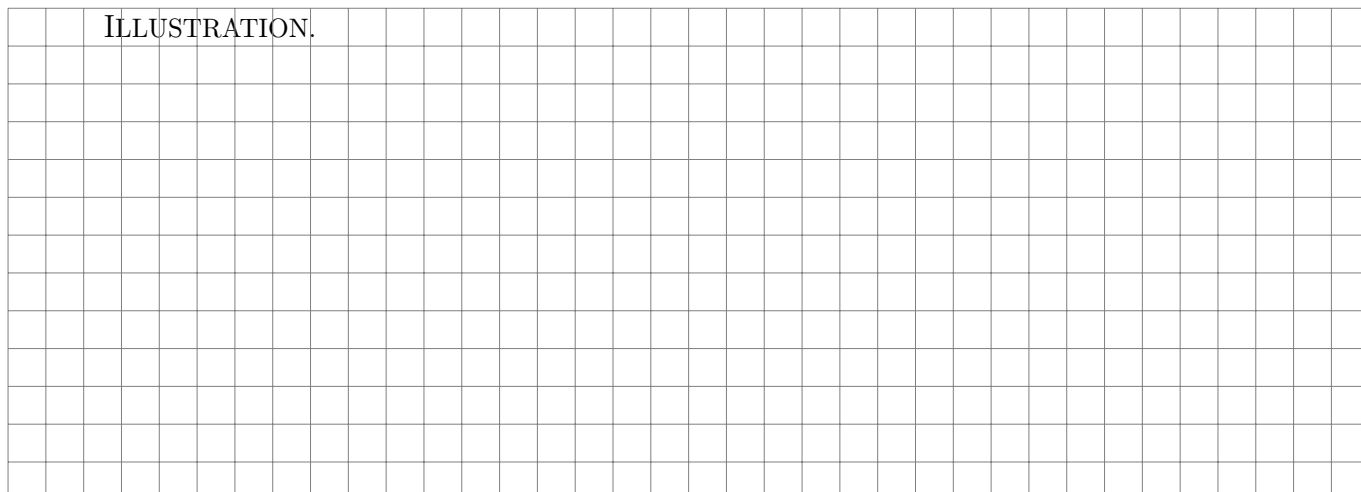


Inversement, soient a et b des droites ayant au moins un point en commun. Si elles en ont au moins deux, alors elles sont égales et $S_b \circ S_a$ est la transformation identité. Supposons maintenant qu'elles sont distinctes et concourent en un point O . La composée $S_b \circ S_a$ laisse fixe le point O . Il reste à voir qu'elle ne laisse aucun autre point du plan fixe. Soit P un point, P' son image sous S_a et P'' son image sous S_b . On suppose que $P'' = P$ et on en conclut que $P = O$.

Si $P \neq P'$ alors a est la médiatrice de P et P' . Comme $P'' = P$, b est aussi la médiatrice de P et P' . Cela contredit le fait a et b sont des droites distinctes. Nous en déduisons que P et P' doivent être égaux. Mais, alors P doit être sur a et comme par hypothèse $P'' = P$ et donc $P'' = P'$, P' doit être sur b . Par conséquent, $P = O$, puisque c'est le seul point commun de a et b par hypothèse. \square

Remarque 3.4. Nous avons vu dans la preuve que si la rotation considérée est l'identité, alors les deux axes de l'énoncé ci-dessus sont égaux à une même droite quelconque du plan. Si ce n'est pas l'identité et si O est le centre, alors les axes passent par O et on peut choisir librement le premier ou le deuxième axe parmi les droites passant par O . En effet, les axes doivent passer par O , puisqu'on a vu qu'une composée $S_b \circ S_a$ ne fixe que le point d'intersection de a et b . On peut choisir librement le premier axe a passant par O , choisir un point A sur a et suivre la procédure expliquée au début de la preuve pour construire l'axe b . On peut aussi choisir librement le deuxième axe b et on obtient le premier axe a de la manière suivante. Soit b une droite passant par O et soit A' sur b . Soit A l'image inverse de A' par \mathcal{R} . Nommons a la médiatrice de $[AA']$. Alors par le même argument qu'au début de la preuve, $\mathcal{R} = S_b \circ S_a$.

ILLUSTRATION.



Pour faire le lien avec le point de vue adopté ici et celui que l'on a usuellement dans un cours de géométrie plane, nous devons encore travailler un peu pour pouvoir parler de l'angle d'une rotation.

Corollaire 3.5. *Soient A et B des points équidistants d'un point O et distincts de O . Alors il existe une unique rotation de centre O qui transforme A en B .*

DÉMONSTRATION. Existence : Si $A = B$, alors on peut prendre l'identité. Sinon, considérons $a = OA$ et b la médiatrice de $[AB]$. La composée $S_b \circ S_a$ est une rotation de centre O par la proposition précédente et elle transforme bien A en B .

Unicité : Si $A = B$, alors l'identité est la seule rotation qui transforme A en B , car les autres rotations laissent fixe seulement le point O . Sinon, il existe une unique isométrie qui transforme O en O et A en B et qui est une rotation par le même argument qu'au début de la preuve de la Proposition 3.3. \square

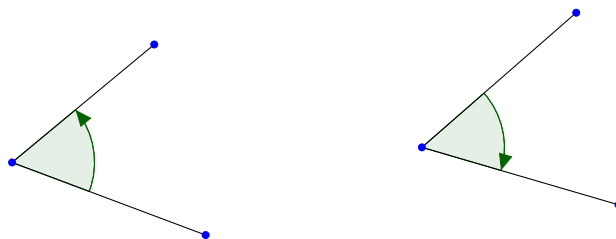
Corollaire 3.6. *La composée de rotations de centre O est une rotation de centre O et l'inverse d'une rotation de centre O en est aussi une. De plus, cette composition est commutative, c'est-à-dire si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont des rotations de centre O , alors*

$$\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}'.$$

Ainsi, les rotations forment un groupe abélien pour la composition, qui est un « sous-groupe » du groupe des isométries du plan.

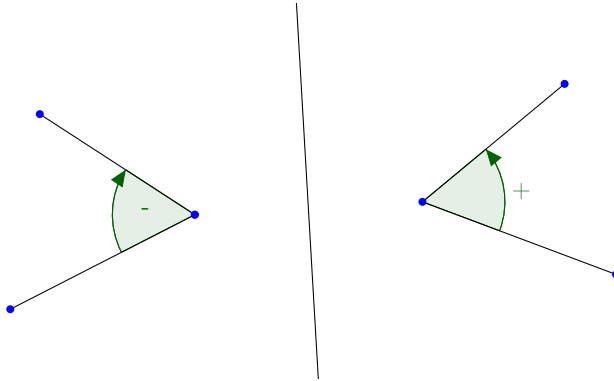
Nous ne donnons pas la preuve ici de ce résultat un peu formel.

Définition 3.7. Un angle-plan est *orienté* si on a choisi un ordre de ses côtés. Un angle plan peut donc avoir deux orientations, qu'on appelle **positive** et **négative**. Elle est positive si un arc coupé par l'angle est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (*sens trigonométrique*) lorsqu'on va du premier côté vers le deuxième, négative sinon.



La *mesure d'un angle orienté* est la mesure de l'angle avec un signe $+$ s'il est orienté positivement, un signe $-$ sinon. On précise l'orientation par l'ordre des lettres : Sab et Sba sont les mêmes angles-plans, mais d'orientation opposée (rappelons que la notation Sab est par contre ambiguë au niveau de l'angle-plan : si l'angle n'est pas plat, alors elle représente, par convention, l'angle-plan *saillant*. Si l'angle-plan est plat, alors cette notation ne suffit pas à déterminer de quel angle on parle).

Définition 3.8. On dit qu'une transformation *préserve* (resp. *inverse*) l'orientation si elle préserve (resp. inverse) l'orientation de tous les angles. Les réflexions inversent l'orientation.



Remarque 3.9. Par conséquent, toute composée d'un *nombre pair* de réflexions *préserve* l'orientation et toute composée d'un *nombre impair* de réflexions *inverse* l'orientation. En particulier, les rotations préservent l'orientation.

Proposition 3.10. Soit \mathcal{R} une rotation de centre O . Alors la mesure et l'orientation de l'angle orienté $\widehat{POP'}$ où $P' = \mathcal{R}(P)$ ne dépendent pas du choix du point $P \neq O$.

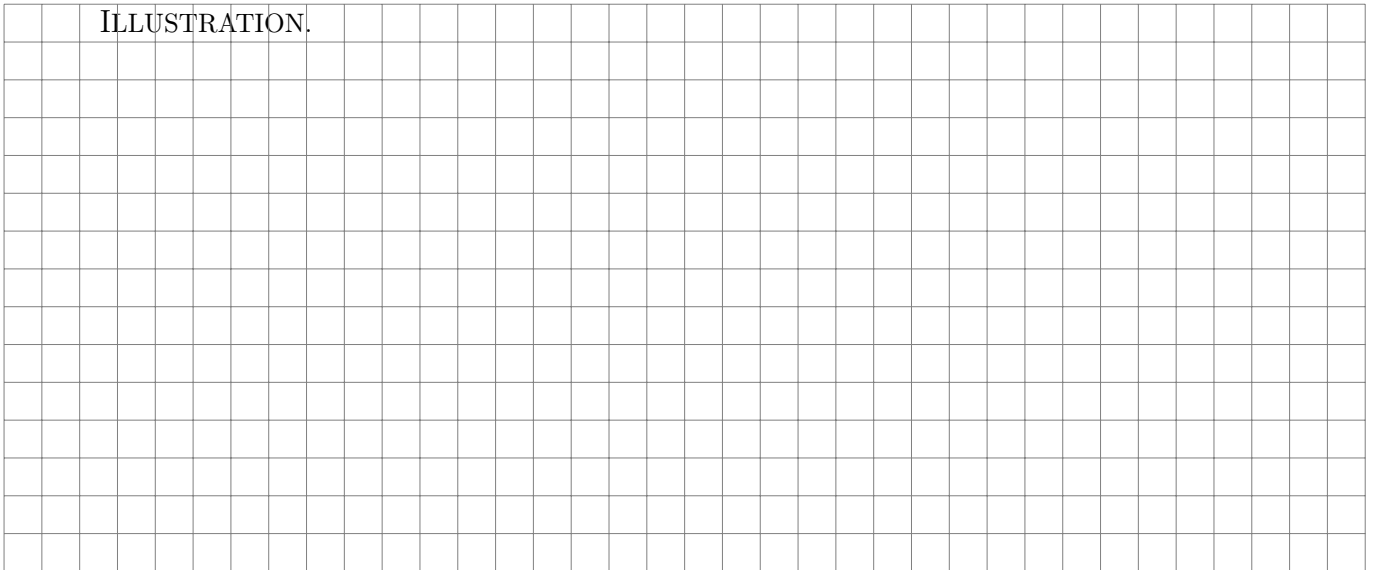
DÉMONSTRATION. Soient A et B deux points distincts de O , A' et B' leurs images respectives sous \mathcal{R} . On montre que les angles orientés $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{BOB'}$ sont isométriques par une rotation (ils ont donc même mesure et même orientation).

Par le Corollaire 3.5, il existe une rotation \mathcal{R}' de centre O qui transforme la demi-droite $[OA$ en la demi-droite $[OB$. On montre que l'image de la demi-droite $[OA'$ sous \mathcal{R}' est la demi-droite $[OB'$. En effet on calcule l'image de la demi-droite $[OA'$ à l'aide du Corollaire 3.6 :

$$\mathcal{R}'([OA']) = \mathcal{R}' \circ \mathcal{R}([OA]) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}'([OA]) = \mathcal{R}([OB]) = [OB']$$

En conclusion, la rotation \mathcal{R}' transforme l'angle orienté $\widehat{AOA'}$ en l'angle orienté $\widehat{BOB'}$. \square

ILLUSTRATION.



Définition 3.11. Soit \mathcal{R} une rotation de centre O , P un point différent de O et $P' = \mathcal{R}(P)$. Alors la mesure de l'angle orienté $\widehat{POP'}$ s'appelle l'*amplitude* de la rotation \mathcal{R} et son orientation le *sens* de la rotation.

Une rotation est donc complètement déterminée par son centre O et son angle (orienté!) de rotation α . On la note souvent $\mathcal{R}(O, \alpha)$.

Exemple 3.12. On se donne un triangle ΔABC et son image $\Delta A'B'C'$ par une rotation \mathcal{R} . Comment trouver le centre O de cette rotation et son angle α de rotation? La première question est résolue grâce au fait que nous savons que \mathcal{R} est composée de deux symétries dont les axes a et b se coupent en O . Une fois que le premier axe est choisi, le deuxième est imposé (ou vice-versa).

