Corrigé série 4

Exercice 1 (10 points)
On rappelle que deux événements quelconques G et H sont dits *indépendants* si

$$P(G \cap H) = P(G)P(H).$$

Il faut donc, dans cet exercice, vérifier si cette équation est satisfaite ou non par les événements mentionnés.

a) Comme on a les probabilités $P(E) = \frac{4}{52}$, $P(F) = \frac{1}{4}$, et $P(E \cap F) = P(\text{tirer as de coeur}) = \frac{1}{52}$, on a bien que l'équation

$$P(E)P(F) = P(E \cap F)$$

est vérifiée. D'où l'indépendance des événements E et F.

b) Il est clair ici que les deux événements sont indépendants. On peut aussi le voir par calcul :

$$P(E)P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(E \cap F).$$

c) En comptant les cas favorables, on a $P(E) = \frac{5}{36}$. Ainsi,

$$P(E)P(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36} = P(E \cap F),$$

donc les événements ne sont pas indépendants

d) Dans ce cas, on a

$$P(E)P(F) = \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(E \cap F),$$

donc les événements sont indépendants

Exercice 2 (5 points)
Comme

$$P(E) = \frac{6}{36}, \qquad P(F) = \frac{1}{6}, \qquad P(E \cap F) = \frac{1}{36}$$
$$P(G) = \frac{1}{6}, \qquad P(E \cap G) = \frac{1}{36}, \qquad P(F \cap G) = \frac{1}{36},$$
$$P(E \cap (F \cap G)) = \frac{1}{36}.$$

on a, en appliquant la même stratégie qu'à l'exercice ,

- E et F sont indépendants,
- E et G sont indépendants,
- E et $F \cap G$ sont dépendants.

Exercice 3 (5 points)
On pose X la variable aléatoire qui donne le plus grand numéro tiré. On a, pour $3 \leq i \leq 20$,

$$P(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}.$$

Ainsi,

$$P(X \geq 17) = \sum_{i=17}^{20} \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{29}{57} \approx 0.509.$$

Exercice 4 (5 points)
On a

$$\begin{aligned} P(A \cap B_1) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2k}{3k-1}, \\ P(A) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2k}{3k-1} \right) = \frac{2k}{3k-1}, \\ P(B_1) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que A et B_1 sont indépendants. Par symétrie du problème, cela implique que A est aussi indépendant de V_1.
Comme

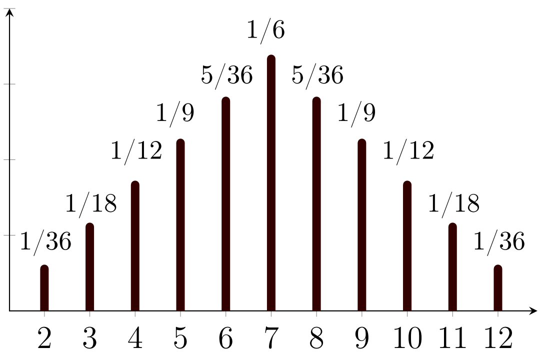
$$\begin{aligned} P(A \cap (B_1 \cap V_1)) &= 0, \text{ et} \\ P(A)P(B_1 \cap V_1) &= P(A) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

on a que A est indépendant de $B_1 \cap V_1$.

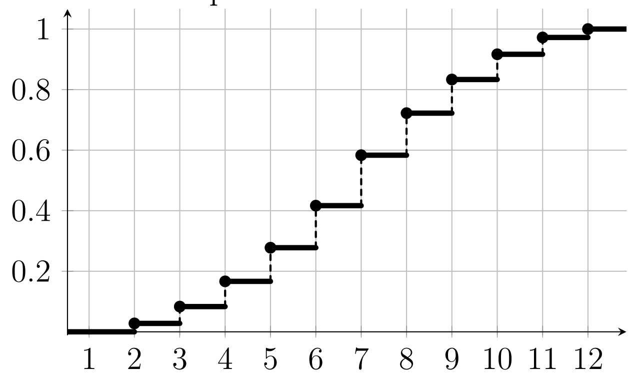
Exercice 5 (5 points)

X : somme des points lors du lancé de deux dés équilibrés.

Loi de probabilités de X.



Fonction de répartition de X.



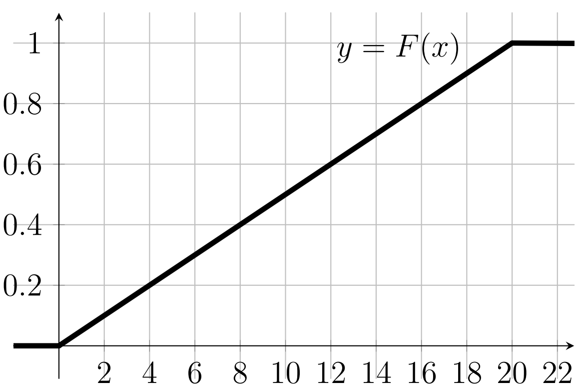
Exercice 6 (5 points)

a) Comme le bus passe toutes les 20 minutes, la personne attendra au maximum 20 minutes, c'est-à-dire $P\{X \leq 20\} = \dfrac{20}{20} = 1$ et par suite, $P\{X \leq x\} = 1 \ \forall x \geq 20$.

$P\{X \leq 10\} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$, $\quad P\{X \leq 1\} = \dfrac{1}{20}$ et pour $x \in [0; 20]$, $P\{X \leq x\} = \dfrac{x}{20}$.

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{20} & \text{si } x \in [0; 20], \\ 1 & \text{si } x > 20. \end{cases}$$



Exercice 7 (5 points)

Soit X la variable aléatoire qui représente le gain net du joueur.

— S'il tire un coeur : $X = 2$ et $P(X = 2) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

— S'il tire un carreau : $X = 1$ et $P(X = 1) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

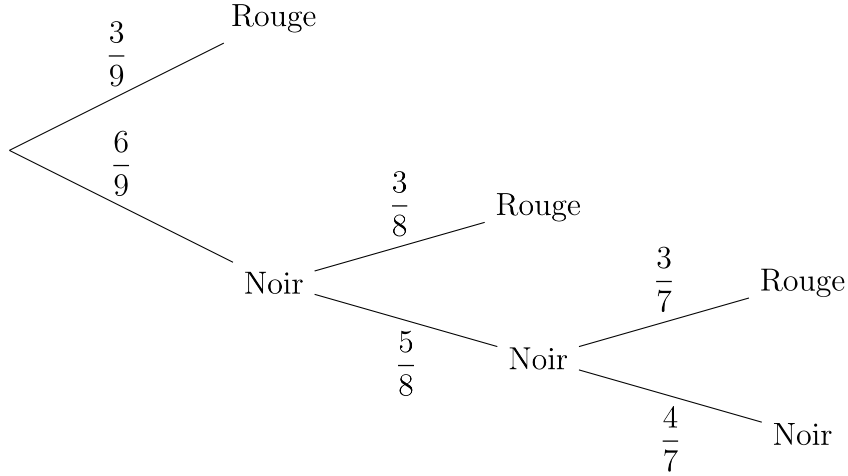
— S'il tire un pique ou un trèfle : $X = -3$ et $P(X = -3) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi, $E(X) = 2 \cdot \dfrac{1}{4} + 1 \cdot \dfrac{1}{4} - 3 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{4} = -0,75$.

Par conséquent, on perd en moyenne 75 centimes par partie.

Exercice 8 (5 points)

Soit X le gain du joueur. On s'aide d'un arbre pour les probabilités :



On obtient les probabilités suivantes :

$$P(X = 100) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
$$P(X = 50) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 0) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{28}$$
$$P(X = -150) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$$
$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{5}{28} - 150 \cdot \frac{5}{21} = \frac{425}{42} \cong 10,12$$

Oui, on accepte de jouer à ce jeu car on gagne en moyenne 10 francs.

Exercice 9 (5 points)

On a les probabilité suivante :

$$P(X = 3) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$
$$P(X = -k) = \frac{1}{4}$$
$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} - k \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{k}{4}$$

Il faut que k soit égal à 5.

Exercice 10 (5 points)

On a représenté l'arbre des possibilités dans la figure 1. Ici, C représente un centime, D cinq centimes et E dix centimes.

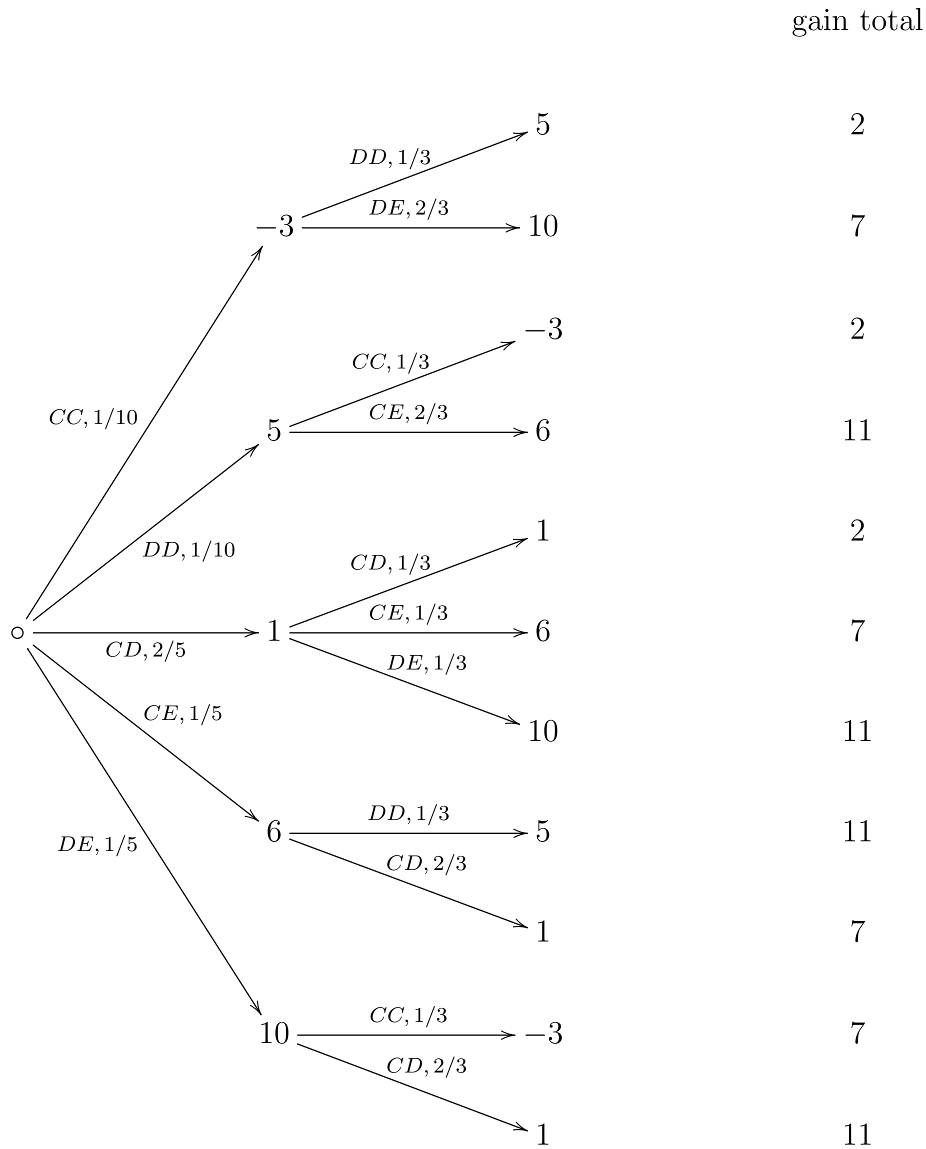


FIGURE 1 – Tableau pour l'exercice

Les cinq branches qui partent de la racine représentent le premier tirage. Sur chaque branche on a indiqué les pièces qui ont été tirées (sans tenir compte de l'ordre), ainsi que la probabilité correspondante.

Chaque branche se termine sur la valeur du gain (en centimes) auquel elle correspond.

À partir de chaque "gain" part un autre set de branches qui représente le deuxième tirage et qui aboutit sur le deuxième gain.

En utilisant l'arbre, on calcule que l'espérance de gain du premier tirage est 3.8, de même que celle du deuxième.

Comme l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme de leur espérance, on trouve que l'espérance totale est 7.6.

Remettre les pièces après le premier tirage ne changera pas les espérances de gain.

Exercice 11 (5 points)

Il faut trouver une suite infinie de valeurs $p_k \in [0;1]$ dont la somme vaut 1 et lui associer une suite de valeurs x_k telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k$ est infinie.

Ainsi la variable aléatoire X prenant les valeurs x_k avec une probabilité p_k est d'espérance infinie.

Par exemple, $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $x_k = 2^k$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$.

Exercice 12 (10 points)

Soit X la variable aléatoire représentant le gain du joueur. Elle peut prendre les différentes valeurs suivantes :

— $X = -1$ et $P(X = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

— $X = 0$ et $P(X = 0) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 3$

— $X = 1$ et $P(X = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 3$

— $X = 9$ et $P(X = 9) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$

Ainsi,

$$E(X) = -1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 + 9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{101}{216} \approx -0.47.$$

Exercice 13 (10 points)

a) On a, avec la définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned} P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) &= P(A)\frac{P(A \cap B)}{P(A)}\frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} \\ &= P(C \cap A \cap B). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525} \approx 1.8 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

c) Soit $\{E_i\}_{i=1,\dots,n}$ une famille d'événements. On va démontrer que

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

Le cas $n = 1$ est trivial, le cas $n = 2$ est la définition de la probabilité conditionnelle, le cas $n = 3$ a déjà été traité en a).

Pour faire le pas de récurrence, supposons que la formule soit vraie pour un $n \geq 3$ quelconque. En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, puis l'hypothèse de récurrence, on peut faire la suite de calculs :

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap \dots \cap E_{n+1}) &= P((E_1 \cap \dots \cap E_n) \cap E_{n+1}) \\ &= P(E_1 \cap \dots \cap E_n)P(E_{n+1}|E_1 \cap \dots \cap E_n) \\ &\overset{\text{récurrence}}{=} P(E_1)P(E_2|E_1) \cdots P(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cdot P(E_{n+1}|E_1 \cap \dots \cap E_n), \end{aligned}$$

comme voulu.

Ainsi, on a établi la formule

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = \prod_{k=1}^{n} P(E_k | \cap_{i=1}^{k-1} E_i).$$

Exercice 14 (5 points)

De l'hypothèse $P(E \cap F) = P(E)P(F)$, on déduit que

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)(1 - P(F^c)) \\ &= P(E) - P(E)P(F^c). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(E)P(F^c) &= P(E) - P(E \cap F) \\ &= (P(E \cap F) + P(E \cap F^c)) - P(E \cap F) \\ &= P(E \cap F^c). \end{aligned}$$