
Test 1 - Probabilités et statistiques

27 septembre 2023

Nom: _____ Prénom: _____

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire dans le dossier. Au besoin, il est possible d'utiliser des feuilles supplémentaires. Justifiez tous vos calculs.

Exercice 1. (10 points) *Burrier juin 2006*

La famille Dupont, le père, la mère et leurs 3 filles, et la famille Lampion, le père, la mère et leurs 2 fils ont réservé un rang de 9 sièges pour assister à une projection du film Oppenheimer. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir, si :

- aucune restriction n'est mise ?
- les familles veulent rester ensemble ?
- chaque couple veut être ensemble et les filles veulent être ensemble ?
- Pendant l'entracte, Monsieur Dupont va acheter 9 cornets glacés. Il y a trois parfums à choix : vanille, fraise et chocolat. Mais il ne connaît pas les préférences des personnes. Combien d'assortiments différents de 9 cornets glacés pourrait-il rapporter à l'équipe ?
- Finalement, Monsieur Dupont prend 1 cornet vanille, 3 cornets fraise et 5 cornets chocolat. De combien de façons peut-il les répartir entre les neuf personnes ?

Exercice 2. (5 points)

Le code d'ouverture d'un coffre-fort se compose de sept chiffres ordonnés. Le propriétaire du coffre-fort a oublié le code, mais il se souvient que ce dernier contient exactement trois fois le chiffre 1 et que les autres chiffres sont tous distincts. Il n'a droit qu'à un seul essai.

- Quelle est la probabilité qu'il ouvre le coffre ?
- Quelle est la probabilité qu'il trouve tous les chiffres du code mais pas nécessairement dans le bon ordre ?

Exercice 3. (5 points)

Chaque matin, Monsieur Douillet sort de chez lui, avec ou sans parapluie selon la météo. Dans sa région, le temps est beau avec probabilité 0.2, couvert avec probabilité 0.3 et mauvais sinon. S'il fait beau, il prend un parapluie en moyenne une fois sur dix, et lorsqu'il le prend, il l'égare avec une probabilité de 95%. Par temps couvert, il prend un parapluie avec probabilité 0.6 et s'il le prend, l'égare avec probabilité de 35%. En cas de mauvais temps, il sort toujours avec un parapluie et ne le perd que rarement, avec une probabilité de 4%.

- Calculer la probabilité que cet homme oublie un jour, quelque part un parapluie.
- Cet homme revient un jour chez lui sans parapluie. Quelle est la probabilité que le temps ait été couvert ce jour-là ?

Exercice 4. (10 points)

On lance deux dés équilibrés et on considère les variables aléatoires
 X = nombre de multiples de 2 obtenus et Y = nombre de 3 obtenus.

- Déterminer les lois de probabilité de X et Y et calculer les espérances de X et Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Déterminer la covariance de X et Y .

Exercice 5. (5 points)

Loi de De Morgan. Soient E_1, \dots, E_n des événements. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$$

Exercice 6. (4 points)

Un jeu consiste à lancer 2 pièces de monnaie. On vous donne 3 francs si vous obtenez deux fois faces et 1 franc si vous obtenez une seule face.

Si vous n'obtenez aucune face, vous devez payer k francs.

Combien doit-on donner lorsque l'on obtient aucune face pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 7. (15 points)

Oui-Oui le chauffeur de taxi a noté le nombre de kilomètres parcourus et le coût des cinq dernières courses qu'il a effectuées.

Nombre de km	14	8	13	9	10
Coût en francs	50	33	46	32	38

- Déterminer la variable indépendante X et la variable dépendante Y .
- Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de kilomètres parcourus.
 Noter le détail des calculs.
 Déterminer et interpréter l'intervalle construit en statistique à partir ces deux valeurs.
- Sachant que l'espérance du coût vaut 39,8 francs et l'écart type 7,11, calculer le coefficient de corrélation en notant le détail des calculs.
 Interpréter ce coefficient de corrélation dans le contexte.
- Calculer le coefficient de détermination en donnant la formule de calculs.
 Interpréter le coefficient de détermination dans le contexte.
- Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés de ce nuage de points en donnant les formules des calculs.
 Que représente les paramètres a et b dans le contexte ?
- Estimer le coût d'une course de 16 km avec ce modèle.