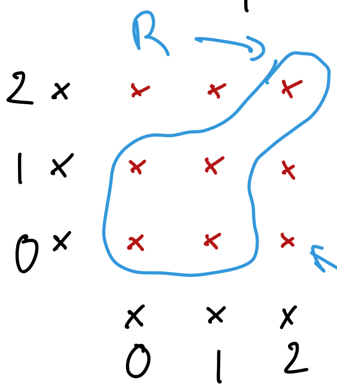
Exemple : $X = \{0, 1, 2\}$

Prenons $R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$

(*)



Représente le produit cartésien $X \times X$

représente $(2,0)$

Plus généralement, une relation sur $X \times Y$ est la donnée de $R \subset X \times Y$.

fin cours 09/09

Exemples de Relations sur $X = \{1, \ldots, 9\}$: $R \subset X \times X$

"$(m,n) \in R \iff m$ divise n"

"$(m,n) \in R \iff m \leq n$"

"$(m,n) \in R \iff m$ et n ont la même parité"

0.1.3 Relations et classes d'équivalence

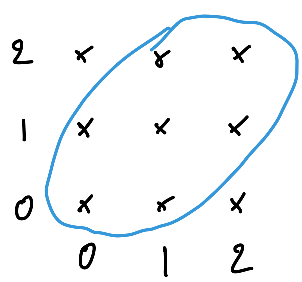
Notations : $\begin{cases} \forall \text{ signifie "pour tout"} \\ \exists \text{ signifie "il existe"}. \end{cases}$

Soit X un ensemble, R une relation sur X. On dit que R est :

Exemple :

- Réflexive si $\forall x \in X$, $(x,x) \in R$ — (*) est réflexive
- Symétrique si $\forall x, y \in X$ tels que $(x,y) \in R$ alors $(y,x) \in R$. — (*) est symétrique
- Transitive si $\forall x, y, z \in X$ tels que $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ alors $(x,z) \in R$ — (*) est transitive

Un exemple de relation non-transitive :



$\tilde{R}$ pas transitive.

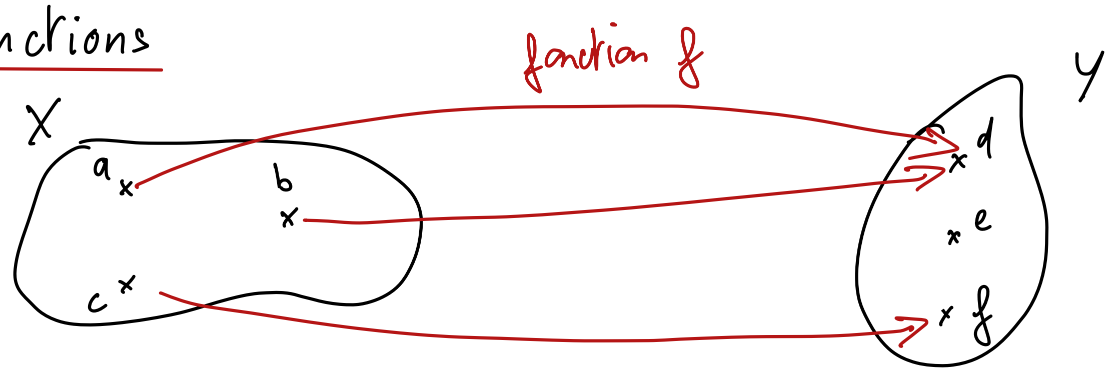
En effet : $(0,1) \in \tilde{R}$ et $(1,2) \in \tilde{R}$

mais $(0,2) \notin \tilde{R}$.

$X/\sim = \{\{\text{élèves en MX}\}, \{\text{élèves en EL}\}, \{\text{élèves en CGC}\}\}$.

0.1.4 Fonctions

(*)



Def: Soient X et Y deux ensembles. Une fonction f de X vers Y est la donnée de $G_f \subset X \times Y$ tel que $\forall x \in X$ il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x,y) \in G_f$.

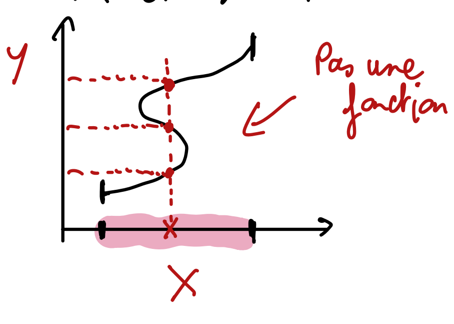
On appelle • y l'image de x par f. On note $y = f(x)$.

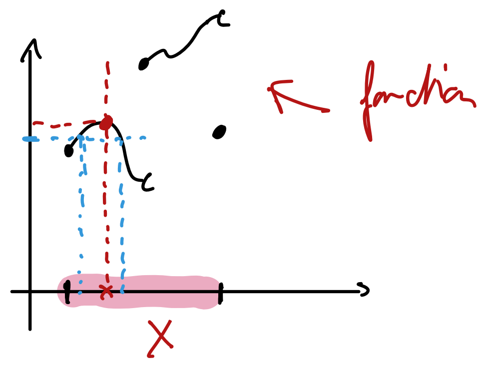
• On note : $f : \begin{vmatrix} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{vmatrix}$ (remarquez la différence entre $\to$ et $\mapsto$)

• On appelle X le domaine et Y le co-domaine de f.

• G_f est le graphe de f

Exemples : $X \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$





Def: Soit $f : X \to Y$.

(i) Pour $A \subset X$, l'image de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble
$$f(A) := \{ f(z) \; ; \; z \in A \}.$$

(ii) l'ensemble image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble image de X:
$$\mathrm{Im}(f) := f(X) = \{ f(z) \; ; \; z \in X \}.$$

(iii) Pour $B \subset Y$, la pré-image de B par f, noté $f^{-1}(B)$ est l'ensemble :
$$f^{-1}(B) \boxed{:=} \{ x \in X \ ; \ f(x) \in B \}.$$
"est égal à, par définition".

Exemple (*) :
- $f(\{a,b\}) = \{d\}$
- $\mathrm{Im}(f) = f(X) = f(\{a,b,c\}) = \{d,f\}$
- $f^{-1}(\{e\}) = \emptyset$
  $f^{-1}(\{d\}) = \{a,b\}$.

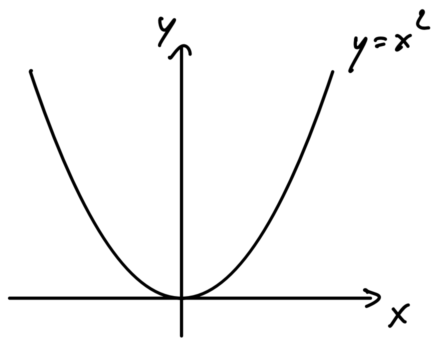
Soit $f : X \to Y$. On dit que :
- f est injective si $\forall x, y \in X$ tels que $x \neq y$ on a $f(x) \neq f(y)$.
- f est surjective si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$.
  (autrement dit si $\mathrm{Im}(f) = Y$)
- f est bijective si elle est injective et surjective.

Exemple :
- (*) pas injective, pas surjective.
- Considérons $f(x) = x^2$

$\{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: bijective (injective et surjective)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: pas injective, pas surjective.



Rmq :
- $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est toujours surjective
- si $f : X \to Y$ est injective alors $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.

Def / Prop : Si $f : X \to Y$ est bijective alors elle admet une (unique) fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$ telle que :

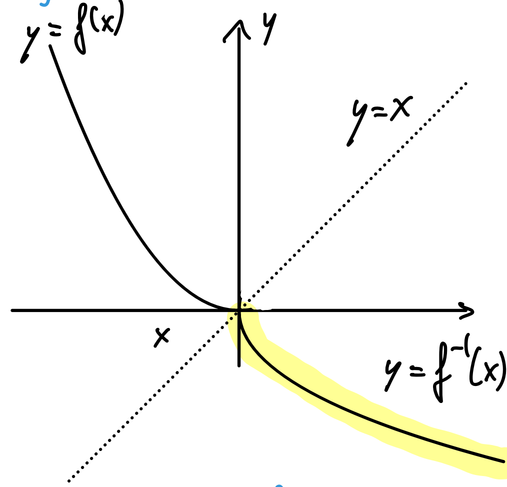
"si et seulement si" "$\iff$"
$$\forall (x,y) \in X \times Y, \quad f^{-1}(y) = x \ \text{ ssi } \ y = f(x)$$

De manière équivalente : $\forall x \in X, \ f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in Y, \ f(f^{-1}(y)) = y$.

<u>Exemple</u> : $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right.$ $\quad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leq 0\}$

f est bijective et

$f^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_- \\ y \longmapsto -\sqrt{y} \end{array} \right.$



fin cours 12/09