

Série 11

Pour le 27 novembre 2024

Exercice 1

Mets les nombres complexes suivants sous forme cartésienne :

$$e^{\frac{3\pi i}{2}}, \quad \sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}}, \quad \frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i}, \quad \frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}}$$

Exercice 2

Calcule l'exponentielle complexe e^z lorsque $z = 1 + i$, $z = e^i$, $z = e^{\pi i}$ et $z = -2i$. Dans les quatre cas, donne la forme cartésienne et indique quel est le module et l'argument.

Exercice 3

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- L'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ coïncide avec l'exponentielle réelle lorsque z est un nombre réel.
- L'exponentielle complexe est injective.
- L'exponentielle complexe est surjective sur \mathbb{C}^* .
- Les seules similitudes du plan qui ne sont pas des isométries sont les homothéties.
- Les seules isométries du plan indirectes (qui ne préservent pas l'orientation) sont les symétries axiales.

Exercice 4

Calcule la détermination principale du logarithme complexe de z dans les cas suivants :

$$z = \pi, \quad z = \pi i, \quad z = e^{\pi i}, \quad z = -\pi i \quad \text{et} \quad z = i + 1.$$

Exercice 5

Ecris les équations dans \mathbb{C} des similitudes suivantes :

- a) translation par $3 - 2i$;
- b) rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- c) rotation de centre $3 - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$;
- d) symétrie dont l'axe est la droite des réels ;
- e) symétrie dont l'axe a pour équation $2x - y + 4 = 0$;
- f) homothétie de centre 0 et de rapport 2, puis rotation d'angle π ;
- g) homothétie de centre $3 - 2i$ et de rapport 3.

Exercice 6

Caractériser géométriquement les similitudes f d'équation :

- a) $f(z) = -\bar{z}$;
- b) $f(z) = z + 3 - 2i$;
- c) $f(z) = i\bar{z} + 3$;
- d) $f(z) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot z$;
- e) $f(z) = (1 + i)z + 1 - i$;
- f) $f(z) = (1 + \sqrt{3}i)\bar{z} + \sqrt{3} - 1$.

Exercice 7

On donne les six points $A = (-2; -3)$, $B = (2; -1)$, $C = (4; 1)$, $A' = (0; 3)$, $B' = (7; 4)$ et $C' = (11; 6)$ formant deux triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$ semblables. Détermine l'équation de la similitude envoyant le triangle ΔABC sur le triangle $\Delta A'B'C'$ et caractérise-la géométriquement.

Exercice 8

Montre que toute homothétie du plan est de la forme $z \mapsto R(z - c) + c$, où R est un nombre réel non nul et c est un nombre complexe arbitraire.

Exercice 9

Décris l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon $r > 0$ centré en l'origine (et privé du point $-r$).