Série 10

Pour le 13 novembre 2024

Exercice 1

Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{3x}$;

b) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$;

c) $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$;

d) $f(x) = \ln(5x)$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\ln x}$;

f) $f(x) = \ln(x - x^2)$.

Exercice 2

Effectue l'étude des fonctions réelles suivantes :

a) $f(x) = \log_{1/2} x$;

b) $f(x) = \sinh x$;

c) $f(x) = \cosh x$;

d) $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 3

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^4)}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot \ln(x^4)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3x+1)\cdot e^x$;

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x-2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 4

Le modèle de Jenss donne une fonction qui calcule la taille moyenne en centimètres d'un enfant pour un âge $0,25 < x < 6$ exprimé en années. On définit $h(x) = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$. Quelle est la taille et le taux de croissance instantanée (la dérivée) d'un enfant d'un an. A quel âge le taux de croissance est-il le plus élevé et à quel âge est-il le plus faible ?

Exercice 5

Trouve une paramétrisation à l'aide des fonctions trigonométriques hyperboliques de l'hyperbole $2y^2 - 3x^2 = 6$.

Exercice 6

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) La fonction exponentielle de base 3 $f(x) = 3^x$ (cf exercice 9 pour la définition) est dérivable, mais la dérivée seconde n'existe pas.

b) La fonction exponentielle de base π $f(x) = \pi^x$ est dérivable un nombre infini de fois.

c) La fonction sinus hyperbolique est périodique.

d) Le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est une parabole.

Exercice 7

La fonction argument sinus hyperbolique. On définit la fonction réciproque de la fonction $\sinh x$, notée Argsinh$x$. Montre que Argsinh$x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, puis calcule sa dérivée et sa dérivée seconde. Trace le graphe de cette fonction.
Remarque : On peut définir de la même manière la fonction réciproque de la fonction $\cosh x$ par Argcosh$x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Exercice 8

Résoudre l'équation $2^{4x-2} - 2^{2x} - 3 = 0$.
Indication. Transforme cette équation en une équation du second degré en posant $y = 2^{2x}$.

Exercice théorique

Exercice 9

Exponentielle de base a.

Soit a un nombre réel positif. On considère la fonction $f(x) = e^{x\ln(a)}$.

a) Montre que la fonction $f(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$ si $a \neq 1$. Quel est son domaine de définition ? Quelle est son image ?

b) On note cette fonction a^x. Explique pourquoi en montrant que pour tout nombre entier n, on a $f(n) = a^n$. Montre aussi que $f(r) = a^r$ pour tout nombre rationnel r.

c) Montre que $a^{x+y} = a^x a^y$.

d) Montre que $(ab)^x = a^x b^x$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

e) Calcule la dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ et étudie la croissance de cette fonction.

f) Calcule la dérivée seconde et étudie la convexité de cette fonction.

g) Calcule les limites $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^a}$ pour $a < 1$ et $a > 1$.