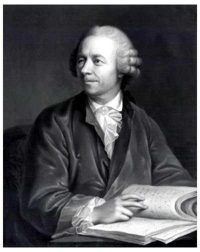


Cours Euler

Module 2

Dérivée

C. Mermoud

2023-2024

I. Continuité

Nous revenons à l'étude générale des fonctions réelles avec la notion de continuité. Comment dire en termes mathématiques que l'on peut "dessiner le graphe d'une fonction sans lever le crayon" ? Nous verrons une définition faisant intervenir des ϵ et des δ, puis nous analyserons le cas des fonctions connues : polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles et logarithmes.

1 Rappels

Pour définir la limite d'une suite de nombres réels (x_n), vous avez dû modéliser la notion d'*arbitrairement proche* en introduisant un nombre ε réel et positif. Un nombre x est alors la limite de la suite si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|x - x_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En d'autres termes, la différence entre les termes de la suite et la limite s'amenuise à mesure que l'on avance dans la suite.

Exemple 1.1. Calculons la limite de la suite $x_n = \dfrac{\cos\left(\sqrt[3]{n+1}\right)}{\sqrt[4]{n^3+1}}$.
Avant de commencer à faire des calculs, remarquons que cette expression est définie $\forall n \in \mathbb{N}$.
D'autre part, le cosinus d'un nombre réel est toujours compris entre -1 et 1, si bien que

$$|x_n| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}.$$

Cette fraction tend vers lorsque n tend vers l'infini. Formalisons-le avec des epsilons.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut n tel que

En posant $N = \left\lfloor \sqrt[3]{\varepsilon^{-4} - 1} + 1 \right\rfloor$, on a bien $\forall n \geq N$

Vous avez développé des méthodes qui permettent d'éviter l'usage de la définition et nous les rencontrerons à nouveau dans ce chapitre.

2 Fonctions continues

Nous étudions le graphe d'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ avec D inclus dans $\mathbb{R}$ et nous nous trouvons par conséquent dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour approcher un point du plan, il faut modéliser la notion d'arbitrairement proche à l'aide de deux nombres ε et δ, arbitrairement petits, qui décrivent ce qui se passe sur chacun des deux axes.

Définition 2.1.
Une fonction réelle f est *continue en un point* a de son domaine de définition si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Si f n'est pas continue en a, on dit qu'elle est *discontinue* en ce point.
On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Remarque 2.2. La définition de la limite d'une fonction permet de traduire cette définition de la façon suivante : f est continue au point a s'il existe un intervalle $]a-u, a+u[$ sur lequel f est définie et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \geq \delta > 0$ tel que

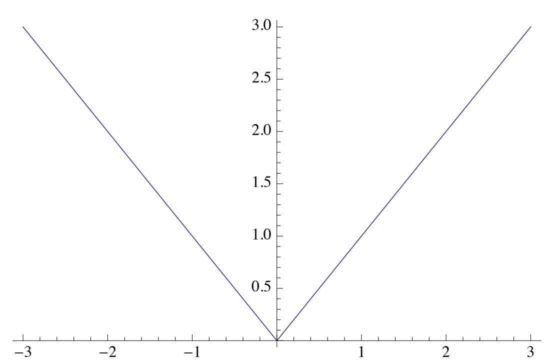
$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

En d'autres termes, les valeurs $f(x)$ sont aussi proches qu'on veut de $f(a)$ si x est suffisamment proche de a.

Exemple 2.3. Considérons la fonction $f(x) = |x|$. Est-elle continue en zéro ?
Remarquons d'abord que $ED(f) = \mathbb{R}$, si bien que le nombre u ci-dessus n'a pas d'importance.

La valeur de la fonction en 0 est 0, si bien que nous devons montrer que $|x|$ s'approche de zéro à mesure que x s'approche de zéro.
C'est bien le cas et nous le formalisons avec des ε et des δ.

Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta_\varepsilon =$



Exemple 2.4. Nous montrerons que les fonctions réelles de type

sont continues sur leur domaine de définition.

La fonction $sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est

La fonction $sign : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Remarque 2.5. Nous avons vu que la définition de limite d'une fonction peut s'exprimer en termes de suites. Par conséquent, une fonction f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite qui converge vers a est une suite qui converge vers $f(a)$.

Plutôt qu'un critère qui permet de démontrer qu'une fonction est continue, cette caractérisation permet parfois de montrer qu'une fonction est discontinue en un point.

Exemple 2.6. Considérons la célèbre fonction de Dirichlet définie comme suit :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Les résultats que nous connaissons sur les limites de fonctions nous donnent immédiatement les résultats suivants sur la continuité

Proposition 2.7. *Soient f et g deux fonctions réelles continues en a. Alors*

1. *La somme $f + g$ est continue en a.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le produit $\alpha \cdot f$ est continu en a.*
3. *Le produit $f \cdot g$ est continu en a.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est continu en a.*

Exemple 2.8. Toute fonction polynomiale est continue. De même, toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition. En effet, la fonction identité est continue (voir exercices).

Par la propriété 3,

Par la propriété 2,

Par la propriété 1,

Par la propriété 4,

Proposition 2.9. *Soient f une fonction réelle continue en a et g une fonction réelle continue en $f(a)$. On suppose que l'image de f est contenue dans $D(g)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. C'est à nouveau ce que nous savons sur les limites qui nous permet de conclure. Comme $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$, la composition $g \circ f$ est continue en a. $\square$

Un concept important pour les fonctions est le prolongement par continuité.
Supposons que nous étudions une fonction définie en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, par exemple $f(x) = \dfrac{x}{x}$.
Existe-t-il une *autre fonction* g définie sur tout $\mathbb{R}$ et continue, qui coïncide avec f sur $D(f)$?
Dans ce cas la réponse est claire : on pose $g(0) =$ puisque $f(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$.
Mais il est souvent plus difficile de savoir si l'on peut, ou non, prolonger une fonction par continuité.

Définition 2.10. Soit f une fonction définie au voisinage de a, mais qui n'est pas définie en a. On suppose de plus que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} g \ : \ D(f) \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D(f) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est le *prolongement par continuité* de f en a.

Remarque 2.11.
Le prolongement par continuité de f en a est par construction une fonction continue en a.

Exemple 2.12. Considérons la fonction $f(x) = x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie dans .

3 Le Théorème de la valeur intermédiaire

Passons maintenant à l'étude du comportement des fonctions continues sur un intervalle fermé.

Définition 3.1. Une fonction réelle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue sur* $[a, b]$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$ et si elle est *continue à droite* en a et *continue à gauche* en b ; on demande donc qu'aux bornes de l'intervalle, on ait $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemple 3.2. La fonction $f(x) = \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0, 1]$. En effet, $g(x) = 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale. La fonction racine est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, f est une composition de fonctions continues qui est donc continue sur $[0, 1[$.
Il reste à regarder ce qui se passe en 1. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0 = f(1)$, c'est gagné !

Théorème 3.3 (de la valeur intermédiaire). *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec $f(a) < f(b)$. Si d est tel que $f(a) < d < f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.*
Un résultat similaire est obtenu si $f(a) > f(b)$: dans ce cas, si d est tel que $f(a) > d > f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration. Considérons le sous-ensemble

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}$$

Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient a, et est majoré par b. Comme $\mathbb{R}$ est complet, la borne supérieure s de S existe. On sait aussi que s est le plus petit majorant de S. Comme f est continue en s, on a $\lim\limits_{x\to s} f(x) = f(s)$. En particulier, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$; comme $f(x_n) < d$ est toujours vrai, on a $f(s) \leq d$ puisque d est un majorant de l'ensemble $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Considérons maintenant

$$T = \{x \in [a, b] \mid x > s\}$$

Les éléments de T ne sont donc pas contenus dans S, si bien que $f(x) \geq d$ pour tout $x \in T$. Donc $f(s) = \lim\limits_{x\to s} f(x) = \lim\limits_{x\to s^+} f(x) \geq d$. Nous avons montré que $f(s) \leq d$ et $f(s) \geq d$, donc $f(s) = d$. □

4 Fonctions réciproques, trigonométriques et exponentielles

Nous avons établi que les fonctions polynomiales et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Nous allons voir maintenant que toutes les fonctions trigonométriques sont continues et parlerons ensuite de la continuité des fonctions réciproques afin de traiter le cas des fonctions trigonométriques réciproques et logarithmes.

Proposition 4.1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues.*

Démonstration. cos est continue (voir série). Par suite, comme $\sin(x) = \cos(\qquad\qquad)$,

□

Corollaire 4.2. *Les fonctions* tan *et* cot *sont continues sur leur domaine de définition.*

Démonstration. $\tan(x) =$ et $\cot(x) =$

□

Exemple 4.3. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)$.

$D(f) =$. Cette fonction est continue sur son domaine de définition car

Etudions son comportement dans les bords de son ensemble de définition.

Esquisse du graphe :

Proposition 4.4. *Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ qui est injective et continue est strictement monotone.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. Il existe donc trois points $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, mais avec $f(b)$ non strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.
Il y a alors deux cas :

□

Théorème 4.5. *Soit f une fonction réelle bijective et continue.*
Alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi continue.

Démonstration. Nous allons supposer par l'absurde que la fonction réciproque n'est pas continue, donc qu'il existe une suite (y_n) qui converge, disons vers $b \in D(f^{-1})$, mais telle que son image $(f^{-1}(y_n))$ ne converge pas vers $f^{-1}(b)$.
Comme f^{-1} est la réciproque de f, on peut définir une suite (x_n) et un nombre $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(a) = b$ en posant simplement $x_n = f^{-1}(y_n)$ et $a = f^{-1}(b)$.

Puisque (x_n) ne converge pas vers a, par définition de la convergence, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N$ mais $|x_k - a| \geq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\text{soit } x_k \geq a + \varepsilon, \quad \text{soit } x_k \leq a - \varepsilon.$$

Par la proposition précédente nous savons que f est strictement monotone, supposons monotone croissante, le cas décroissant étant similaire, si bien que pour tous les $k \in \mathbb{N}$ ci-dessus, on a

$$\text{soit} \quad y_k = f(x_k) \geq f(a + \varepsilon) = f(a) + \delta = b + \delta, \quad \text{soit} \quad y_k = f(x_k) \leq f(a - \varepsilon) = b - \delta'.$$

où $\delta = f(a + \varepsilon) - f(a) > 0$ et $\delta' = f(a) - f(a - \varepsilon) > 0$.
Dans les deux cas, cela contredit le fait que la suite (y_n) converge vers b. □

Exemple 4.6. Toutes les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

$$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi] \qquad \arcsin : [-1;1] \to [-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}]$$
$$\arctan :]-\infty;\infty[\to]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[\qquad \operatorname{arccot} :]-\infty;\infty[\to]0;\pi[$$

sont continues.

Pour terminer nous aimerions appliquer ce résultat à la réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire au logarithme. Il nous faut pour cela établir la continuité de $\exp_a$.

Proposition 4.7. *La fonction* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est continue pour tout* $a > 0$.

Démonstration. Nous avons défini la fonction $\exp_a$ en prolongeant par continuité l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

La fonction $\exp_a$ est donc continue par construction.

$\square$

Corollaire 4.8. *Soit* $a > 0$ *et* $a \neq 1$. *Alors la fonction* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est continue.*

Démonstration. $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ qui est continue.

$\square$

II. Dérivation

Dans ce module d'analyse, notre but est d'étudier plus finement le graphe des fonctions réelles. La semaine dernière, nous avons parlé de continuité. Aujourd'hui, nous allons aborder des outils qui nous permettront d'analyser la croissance et la concavité. Il nous faudra quelques semaines pour y arriver.

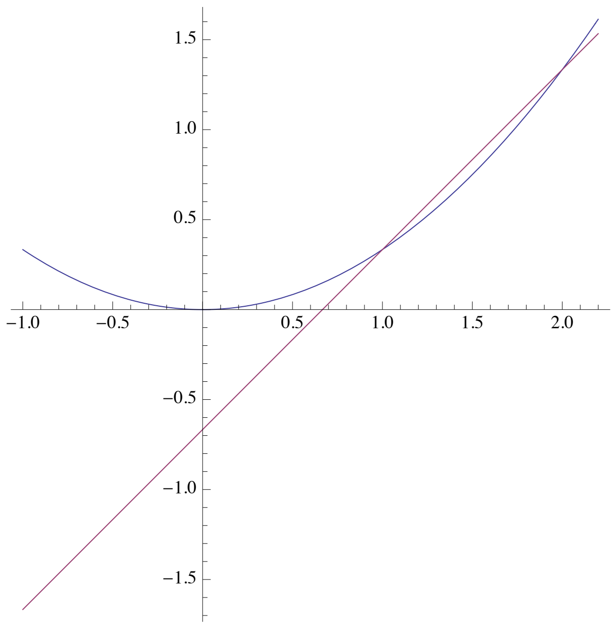
1 La dérivée

Nous savons que la notion de continuité modélise le fait de pouvoir tracer le graphe d'une fonction sans lever le crayon. Intuitivement, il est clair que certains graphes sont plus agréables à tracer que d'autres. Une fonction affine, sinusoïdale ou quadratique est "aisée" à tracer, alors qu'une ligne polygonale brisée comme le graphe de la valeur absolue se trace avec des "à-coups". On décide de mesurer cela en observant les droites tangentes au graphe de la fonction.

Définition 1.1. version géométrique.
Soit f une fonction réelle définie au voisinage du point a. La *dérivée* de f en a est la pente de la tangente au graphe de la fonction f au point $(a; f(a))$, pour autant que cette tangente existe.

Exemple 1.2. La fonction $x \mapsto |x|$

Pour pouvoir travailler avec la notion de dérivée, nous avons besoin d'une définition analytique. On ne va pas tracer la tangente au graphe et mesurer la pente à la règle ! Choisissons donc un point x pas trop éloigné de a et traçons la droite du plan passant par les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$.



La pente de cette droite vaut

Définition 1.3. Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un point a. Alors le *nombre dérivé* de f en a, s'il existe, est donné par

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple 1.4. Soit la fonction $f(x) = 1000$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.5. Soit la fonction $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.6. Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Calculons le nombre dérivé $f'(a)$ en tout point $a \in \mathbb{R}$.
Rappelons que la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Utilisons la formule trigonométrique de la différence de deux sinus

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} =$$

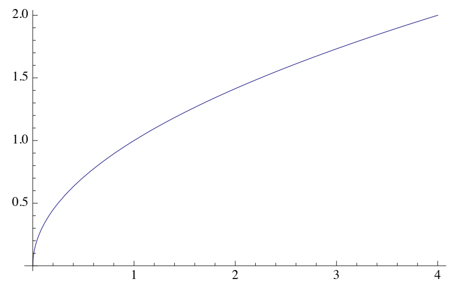
Le produit des limites est égal à la limite du produit, lorsque ces limites existent.
On peut donc écrire

Définition 1.7. Soit $D(f') \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble des points où la dérivée de f existe.
La fonction $f' : D(f') \to \mathbb{R}$ qui associe à tout point $x \in D(f')$ son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* ou *dérivée* de f, pour autant que $D(f')$ soit non vide.

Exemple 1.8.

Remarque 1.9. On étend la notion de dérivée de la même façon qu'on a étendu la notion de limite. On peut ainsi parler de dérivée infinie lorsque la tangente au graphe est verticale. On peut aussi parler de dérivée à droite et de dérivée à gauche.

Exemple 1.10. Considérons par exemple la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.



Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+$. Calculons la dérivée à droite en zéro.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} =$$

Nous verrons d'autres exemples en exercice.

Pour terminer avec les généralités, nous démontrons que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité. En particulier il n'y a pas de sens à vouloir calculer la dérivée d'une fonction qui n'est pas continue. Géométriquement, il est clair que nous n'arriverons pas à tracer la tangente en un point où la fonction n'est pas continue !

Proposition 1.11. *Une fonction dérivable en un point a est continue en ce point.*

Démonstration.

$\square$

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Comme pour les limites, l'une des méthodes les plus puissantes pour calculer la dérivée de fonctions "compliquées" est de les décomposer en morceaux plus simples. Il faut donc apprendre à calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composition, etc.
Le premier résultat nous dit que la dérivation est une opération linéaire.

Théorème 2.1. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
Alors $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Démonstration.

□

Exemple 2.2. Considérons la fonction $h(x) = \pi x^2 + 1000$. On calcule la dérivée avec la formule précédente et à l'aide des exemples de la section précédente. On obtient

Vous démontrerez le résultat suivant en exercice. Il permet de calculer la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

Théorème 2.3. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a.*
Alors $f \cdot g$ est aussi dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(x) = x^2 \sin(x)$. Alors

$f'(x) =$

Nous passons maintenant au quotient de fonctions dérivables.

Théorème 2.5. *Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en a. Supposons que $g(x) \neq 0$ au voisinage de a. Alors $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Démonstration. Ecrivons la différence des quotients $\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)$ en mettant au même dénominateur, puis en enlevant et ajoutant $f(a)g(a)$ au numérateur :

$$\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a) \;=\; \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \;=\; \frac{f(x)\,g(a) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - f(a)\,g(x)}{g(x)\cdot g(a)}$$

Ainsi, $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} \;=\; \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{g(x)\cdot(x-a)} + f(a)\cdot\frac{g(a)-g(x)}{g(x)\cdot g(a)\cdot(x-a)}\right)$$

On voit que cette expression est égale à

□

Nous en avons terminé avec les opérations élémentaires et allons conclure cette partie avec l'inverse d'une fonction dérivable.

Théorème 2.6. *Soit f une fonction réelle bijective sur un intervalle ouvert $]a-u, a+u[$ et dérivable en a. Supposons que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction inverse f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Démonstration. Puisque la fonction f est bijective au voisinage de a, on sait que la fonction inverse de f existe et est définie au voisinage de $b = f(a)$.

Il s'agit donc de calculer la limite de $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ lorsque y tend vers b.

La bijectivité de f permet à nouveau d'écrire tout y au voisinage de b comme $y = f(x)$ pour un unique nombre réel x compris entre $a - u$ et $a + u$. Ainsi,

$\square$

Géométriquement, on comprend bien que la pente de la tangente en un point du graphe de la fonction inverse est l'inverse de la pente $f'(a)$ puisque le graphe de la fonction inverse est obtenu par symétrie autour de la diagonale.

Exemple 2.7. Considérons la fonction $f(x) = \sin x$. La fonction inverse est $\arcsin x$ et nous voulons calculer la dérivée en un point b de l'intervalle $]-1,1[$.

III. Accroissements finis

La dernière règle de base pour pouvoir dériver de nombreuses fonctions est celle de la composition de deux fonctions. Nous passerons ensuite à l'un des théorèmes les plus importants de ce module, celui des accroissements finis. Il nous permettra entre autres de démontrer la règle de Bernoulli-L'Hospital sur le calcul de certaines limites de quotients.

1 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1.1. *Soient f et g des fonctions réelles telles que $g \circ f$ existe. On suppose que f est dérivable en a et g en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Démonstration. Lorsque $f(x) \neq f(a)$ on peut écrire

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Par conséquent, lorsque x tend vers a (et donc, par continuité de f, $f(x)$ tend vers $f(a)$), on voit que la limite de l'expression ci-dessus tend vers $g'(f(a)) \cdot f'(a)$.
Si $f(x) = f(a)$ dans un voisinage de a, alors la fonction f est constante autour de a.
Dans ce cas, $f'(a) = 0$ et comme $g \circ f$ est aussi constante dans un voisinage de a, $(g \circ f)'(a) = 0$ et la formule est vraie aussi. □

Exemple 1.2. Considérons la fonction $h(x) = (x^2 - 3x + 4)^7$.

Exemple 1.3. Considérons la fonction $h(x) = x^r$ où r est un nombre rationnel positif, disons $r = p/q$, où p et q sont des nombres entiers positifs.

Nous avons maintenant à notre disposition un tel arsenal de règles de dérivation que nous pouvons aussi répondre à la question suivante : nous connaissons des fonctions continues qui ne sont pas dérivables, des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas dérivable en tout point, mais existe-t-il des fonctions dérivables en tout point dont la dérivée n'est pas continue ? La réponse se trouve dans la série d'exercices...

2 Recherche du minimum et maximum

Un des points importants d'une étude de fonction est de trouver ses extrema, minimum et maximum. La proposition qui suit nous apprend que les points où la dérivée s'annule sont des candidats sérieux.
Rappelons qu'un point a est un *maximum local* (respectivement *minimum local*) s'il existe un voisinage de a, disons $]a - \delta, a + \delta[$, tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$.

Proposition 2.1. *Soit f une fonction réelle dérivable en a. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Nous effectuons la preuve dans le cas où a est un minimum local, si bien que $f(x) \geq f(a)$ au voisinage de a.

□

Remarque 2.2. La dérivée d'une fonction peut être nulle en un point sans que ce point soit un extremum local.

D'autre part, il existe des fonctions qui admettent un extremum local en un point où la dérivée ne s'annule pas.

Parmi quels points faut-il chercher les extrema locaux d'une fonction réelle ?
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé, vous avez vu l'année passée que cette fonction va nécessairement atteindre son maximum et son minimum.

Théorème 2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé. Alors f atteint son maximum et son minimum parmi*

Démonstration.

$\square$

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. D'autre part, l'expression $x^4(x-1)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si bien que la racine cinquième aussi :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Le théorème de la valeur intermédiaire nous assure déjà l'existence d'un point où la fonction va couper l'axe Ox et de fait on voit facilement que $f(x)$ s'annule en $x = 0$ et $x = 1$.

— AV :

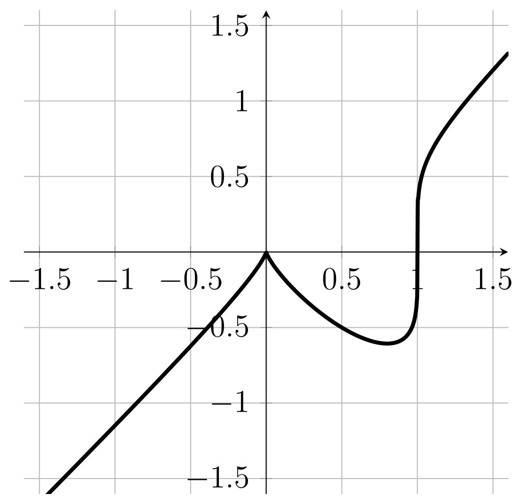
— AH :

— AO :

— Dérivée :

Que pouvons-nous dire de ces calculs ?

Nous verrons plus tard comment déterminer analytiquement ce qui se passe en ces points. Pour le moment, demandons à Mathematica de tracer le graphe de cette fonction :



Nous observons que le point $(0; 0)$ est un maximum local, le point $\left(\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt[5]{256}}{5}\right)$ est un minimum local et le point $(1; 0)$ n'est pas un extremum local.

3 Le Théorème des accroissements finis

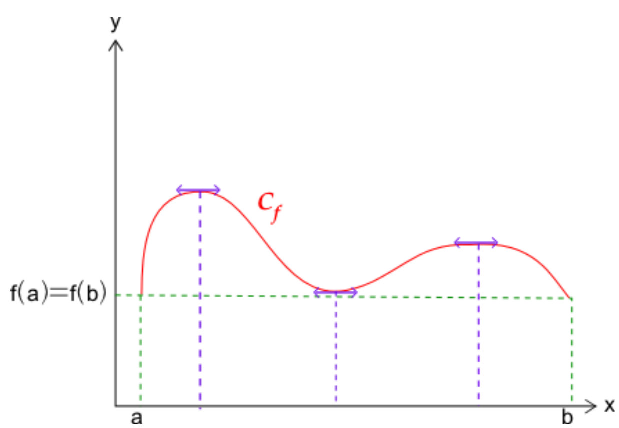
Le théorème des accroissements finis prédit l'existence d'un point du graphe d'une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ où la pente de la tangente est la pente du segment joignant $(a; f(a))$ à $(b; f(b))$. Un cas particulier est donné par le Théorème de Rolle (1652–1719) ; ce théorème semble avoir été connu par les mathématiciens indiens dès le 12 siècle, mais la première preuve connue est celle de Michel Rolle en 1691.

Théorème 3.1. de Rolle.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si la fonction f est constante, le résultat est évident.
Sinon,

□

Géométriquement, cela signifie que quelque part entre a et b il existe un point (au moins) où la pente de la tangente est nulle, c'est-à-dire parallèle à l'axe Ox.



Une généralisation immédiate de ce théorème sera démontrée en exercice. Il s'agit d'un des théorèmes les plus importants du chapitre : le Théorème des accroissements finis.

Théorème 3.2. des accroissements finis.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. Il existe alors un point $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Plutôt que d'illustrer ce théorème par des exemples, voyons ses conséquences théoriques !

Corollaire 3.3. *Soient f et g des fonctions continues dont les dérivées f' et g' coïncident en tout point de $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $a < x < b$.*

Démonstration. Posons $h(x) = f(x) - g(x)$. Une différence de fonctions continues et dérivables est aussi continue et $h'(x) = 0$ pour tout $a < x < b$. Appelons $c = h(a)$ et regardons donc de plus près un point $a < d < b$. Nous voulons démontrer que $h(d) = c$.
Par le Théorème des accroissements finis,

□

Le corollaire suivant nous permettra d'étudier la croissance et décroissance des fonctions réelles.

Corollaire 3.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a,b[$. Alors,*
f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

Démonstration. Clairement, si f est croissante, le signe de la dérivée sera positif. En effet,

Pour la réciproque, supposons donc que $f'(x) \geq 0$ pour tout $a < x < b$.
Soit $u < v$ deux points de l'intervalle $[a,b]$. Par le Théorème des accroissements finis,

□

L'analogue pour les fonctions décroissantes se trouve ... en exercice !

4 La règle de Bernoulli-L'Hospital

Nous arrivons à l'un des moments phare de ce chapitre. Il s'agit d'une règle de calcul de limite de quotient qui nous simplifiera la vie de manière phénoménale. La démonstration que nous verrons la semaine prochaine se base sur une généralisation du Théorème des accroissements finis.

Théorème 4.1. des accroissements finis généralisés.
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle fermé et dérivables en tout point de $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule en aucun point de $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. Notons d'abord que l'hypothèse sur la dérivée de g implique que $g(b) - g(a) \neq 0$ car g est strictement monotone sur $]a, b[$, si bien que l'énoncé fait sens.
Considérons alors la fonction

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\,\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Théorème 4.2. de Bernoulli-L'Hospital.
Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle semi ouvert et dérivables en tout point de* $]a, b[$.
On suppose de plus que g' *ne s'annulent en aucun point de* $]a, b[$ *et que* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Alors, si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ *ou* $\pm\infty$,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nous démontrerons ce résultat la semaine prochaine et en voyons une application spectaculaire en comparaison avec le calcul fastidieux fait l'année passée.

Exemple 4.3. Considérons les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.

Attention de ne pas appliquer ce théorème lorsque que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) \notin \{0, \pm\infty\}$ car le résultat est en général faux !

Exemple 4.4. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2} = \qquad \neq \lim_{x\to 1} \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad .$

IV. Etude de fonctions

Dans ce cours, nous allons démontrer le théorème de Bernoulli-L'Hospital, puis étudier la convexité du graphe d'une fonction réelle à l'aide de la dérivée seconde.
Pour terminer, nous donnerons le plan général d'une étude complète de fonctions.

1 La règle de Bernoulli-L'Hospital

La démonstration de cette règle de calcul que nous verrons aujourd'hui se base sur le théorème des accroissements finis généralisé.

Théorème 1.1. de Bernoulli-L'Hospital.
Soient $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles continues définies sur un intervalle semi ouvert et dérivables en tout point de* $]a, b[$.
On suppose de plus que g' *ne s'annulent en aucun point de* $]a, b[$ *et que* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Alors, si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ *ou* $\pm\infty$,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration. Nous effectuons la preuve dans le cas où $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$.

Dans ce cas, on prolonge f et g par continuité en a en posant $f(a) = g(a) = \quad$.

Par le théorème des accroissements finis généralisés,

Lorsque x tend vers a par la droite,

$\square$

Le résultat est cité ici avec une limite à droite, mais il est bien sûr valide pour les limites à gauche, et donc pour les limites absolues.

Les cas où $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ sont légèrement plus délicats et les élèves intéressés peuvent en trouver une preuve complète dans la plupart des livres d'analyse, par exemple "Calcul différentiel et intégral" de Douchet et Zwahlen.

Exemple 1.2. Calculons la limite du quotient $\dfrac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$ lorsque x tend vers l'infini.
Numérateur et dénominateur tendent vers l'infini et nous devons lever cette indétermination.
Si nous appliquons la règle de Bernoulli-L'Hospital, nous calculons le quotient des dérivées :

$$\frac{(3x+\cos x)'}{(\sqrt{x^2+1})'} =$$

Il y a à nouveau une indétermination et on calcule une seconde fois le quotient des dérivées :

La situation ne s'est pas simplifiée et le terme $(x^2+1)\cdot\cos x$ oscille entre des valeurs de plus en plus grandes alternativement positives et négatives... Appelons les gendarmes pour calmer la situation.

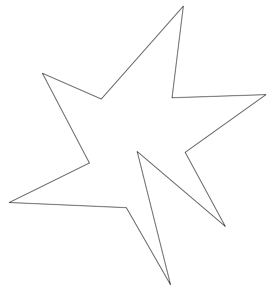
Reprenons notre quotient : $\dfrac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$

Or,

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} =$

2 Convexité et concavité

Un sous-ensemble A de points du plan est dit *convexe* si le segment qui relie deux points quelconques de A est entièrement contenu dans A. Ainsi un disque est convexe, alors qu'un polygone étoilé ne l'est pas :

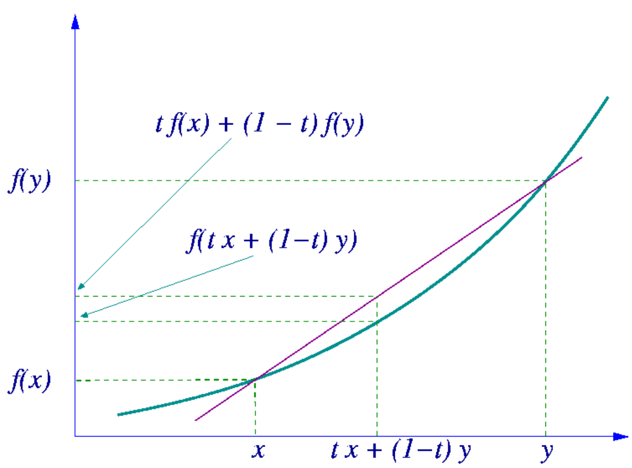


Ceci motive la définition de convexité pour des fonctions réelles.

Définition 2.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est *convexe* sur l'intervalle $[a, b]$ si, pour toute paire de points x et y compris entre a et b et tout nombre réel $0 \leq t \leq 1$, on a

La fonction est dite *concave* sur $[a, b]$ si

Que signifie cette définition ? Lorsque t parcourt tous les nombres réels compris entre 0 et 1, la combinaison linéaire $tx + (1 - t)y$ parcourt tous les nombres réels entre x et y. Le segment reliant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est formé des points $P_t = (\, tx+(1-t)y\,;\, tf(x)+(1-t)f(y)\,)$ avec $t \in [0; 1]$.



Ainsi la fonction f est convexe si tout point du graphe de f est situé

Exemple 2.2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur tout $\mathbb{R}$. En effet, pour $x < y$ et $0 \leq t \leq 1$,

$f(t\,x + (1-t)\,y) - t\,f(x) - (1-t)\,f(x) =$

Le résultat était attendu dans ce cas : puisque le coefficient devant x^2 est positif, la parabole représentant la fonction est convexe.

Lemme 2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors si $a \leq x < y < z \leq b$, on a*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Démonstration. Remarquons que si $t = \dfrac{z-y}{z-x}$, alors $1 - t = \dfrac{z - x - (z-y)}{z-x} = \dfrac{y-x}{z-x}$.
D'autre part,

$$tx + (1-t)z = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z = \frac{zx - yx + yz - xz}{z-x} = y$$

Par définition de convexité, on sait alors que $f(y) \;\leq\; \dfrac{z-y}{z-x}f(x) + \dfrac{y-x}{z-x}f(z)$.
Divisons cette inégalité par $y - x$:

$$\frac{f(y)}{y-x} \leq \frac{z-y}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{1}{z-x}f(z) = \frac{z-x}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{x-y}{(y-x)(z-x)}f(x) + \frac{1}{z-x}f(z)$$

Une soustraction nous permet d'obtenir $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\leq\; \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$. $\square$

Proposition 2.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors,*
f est continue et admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite.
De plus, si $x < y$ et que la dérivée existe en ces points, alors $f'(x) \leq f'(y)$.

Démonstration. Voyons d'abord pourquoi f est continue sans entrer dans les détails des ε et δ. Fixons x et considérons deux suites monotones $x_n < x$ et $y_n > x$ qui tendent toutes deux vers x. Définissons $m = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ et $M = \dfrac{f(y_0) - f(x)}{y_0 - x}$. Le lemme précédent garantit que

$$m \ \leq \ \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \ \leq \ \frac{f(x_{n+1}) - f(x)}{x_{n+1} - x} \ \leq \ \frac{f(y_{n+1}) - f(x)}{y_{n+1} - x} \ \leq \ \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \ \leq \ M.$$

Finalement, si $x < y$ et c est un nombre quelconque compris entre x et y, les inégalités

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(c) - f(y)}{c - y}$$

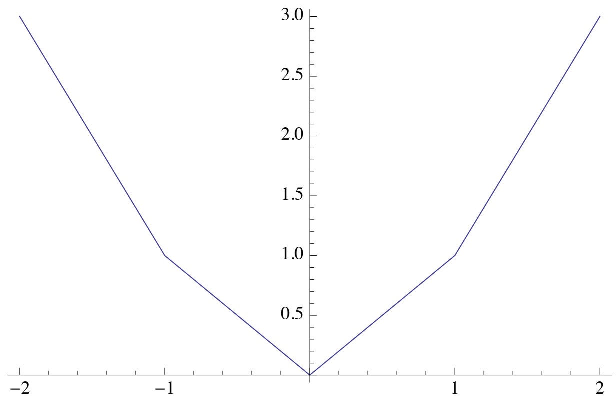
montrent que $f'_d(x) \leq f'_g(y)$ et donc que $f'(x) \leq f'(y)$ puisqu'on suppose ici que la dérivée existe. □

La proposition ci-dessus dit que les dérivées à droite et à gauche existent, elle ne dit pas qu'elles coïncident ! Une version plus générale dit de fait que la dérivée à gauche est toujours plus petite que celle à droite.

Exemple 2.5. On définit une fonction f "par morceaux" sur l'intervalle $[-2, 2]$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Son graphe est visiblement convexe, même si la démonstration pourrait être fastidieuse :



On voit que les dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas en -1, 0 et 1.

La conséquence la plus importante de la proposition précédente s'obtient dans le cas où on suppose que la fonction étudiée est dérivable.

Théorème 2.6. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

f est convexe si et seulement si la dérivée $f'(x)$ est une fonction croissante.

Démonstration. Si f est convexe et dérivable, la dérivée est croissante, nous venons de le démontrer. Supposons donc que la dérivée est croissante. Pour montrer que f est convexe, nous allons travailler directement avec la définition.

Fixons donc $x < y$ et un nombre $0 \leq t \leq 1$ et posons $u = t\,x + (1-t)\,y$.

Le Théorème des accroissements finis garantit l'existence de $c \in]x, u[$ et $d \in]u, y[$ tels que

$$f'(c) = \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad \text{et} \quad f'(d) = \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$$

donc $f(x) =$ et $f(y) =$

De plus, comme $c < d$, et qu'on suppose f' croissante,

Ainsi, $t\,f(x) + (1-t)\,f(y) \;=$

$$= \; f(u) - t\,(u - x)\,f'(c) + (1-t)(y - u)\,f'(d)$$

Par conséquent, puisque $u = tx + (1-t)\,y$,

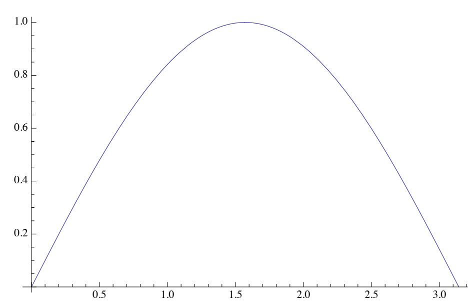
$$\begin{aligned} t\,f(x) + (1-t)\,f(y) &= f(u) - t\,(t\,x + (1-t)\,y - x)\,f'(c) + (1-t)(y - t\,x - (1-t)\,y)\,f'(d) \\ &= f(u) - t\,(1-t)(y-x)f'(c) + (1-t)t(y-x)f'(d) \\ &= f(u) + \\ & \quad f(u) = f(tx + (1-t)\,y) \end{aligned}$$

Ainsi, $t\,f(x) + (1-t)\,f(y) \geq f(t\,x + (1-t)\,y)$, donc f est convexe. □

Grâce à notre étude de la croissance d'une fonction dérivable, nous obtenons immédiatement le critére de convexité suivant :

Corollaire 2.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois. Alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ sur $[a,b]$.*

Exemple 2.8. La fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ est



Définition 2.9. Une fonction réelle f admet a comme *point d'inflexion* si f est convexe à gauche de a, puis concave à droite de a, ou inversément.

3 Etude de fonctions

Nous avons les clés en main pour effectuer l'étude complète d'une fonction réelle quelconque. Nous savons étudier le signe de la fonction, de sa dérivée et de sa dérivée seconde, et ainsi déterminer les intervalles de croissance, décroissance, convexité et concavité. La règle de base n'est pas de respecter coûte que coûte l'ordre des opérations, mais de penser *globalement* à l'étude de la fonction et de s'assurer que les résultats sont *cohérents*.

Voici le plan général d'une étude de fonction :

1. Déterminer le domaine de définition $D(f)$ et les points de discontinuité ;
2. Déterminer si la fonction est paire ou impaire, si elle est périodique (et quelle est la période) ;
3. Déterminer le signe de f ;
4. Calculer les limites aux points du bord de $D(f)$, en particulier en $\pm\infty$; en déduire s'il y a des asymptotes verticales et horizontales, en donner les équations ;
5. Déterminer l'existence d'asymptotes obliques, en donner les équations ;
6. Calculer la dérivée, son domaine de définition $D(f')$ et son signe ;
7. Calculer la dérivée seconde, son domaine de définition $D(f'')$ et son signe ;
8. Calculer les limites de la dérivée aux bord de $D(f')$;
9. Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' ;
10. Déterminer les extrema locaux de f et les points d'inflexion, ainsi que l'ordonnée à l'origine ;
11. Déterminer les intervalles de croissance, décroissance, convexité et concavité ;
12. Tracer le graphe de f ;
13. Etablir d'autres symétries que la parité s'il y a lieu.

Exemple 3.1. Nous étudions la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

— Domaine de définition :

Nous étudions donc la fonction $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Cette fonction est visiblement impaire et elle ne s'annule qu'en 0.

— Signe de $g(x)$:

— AV :

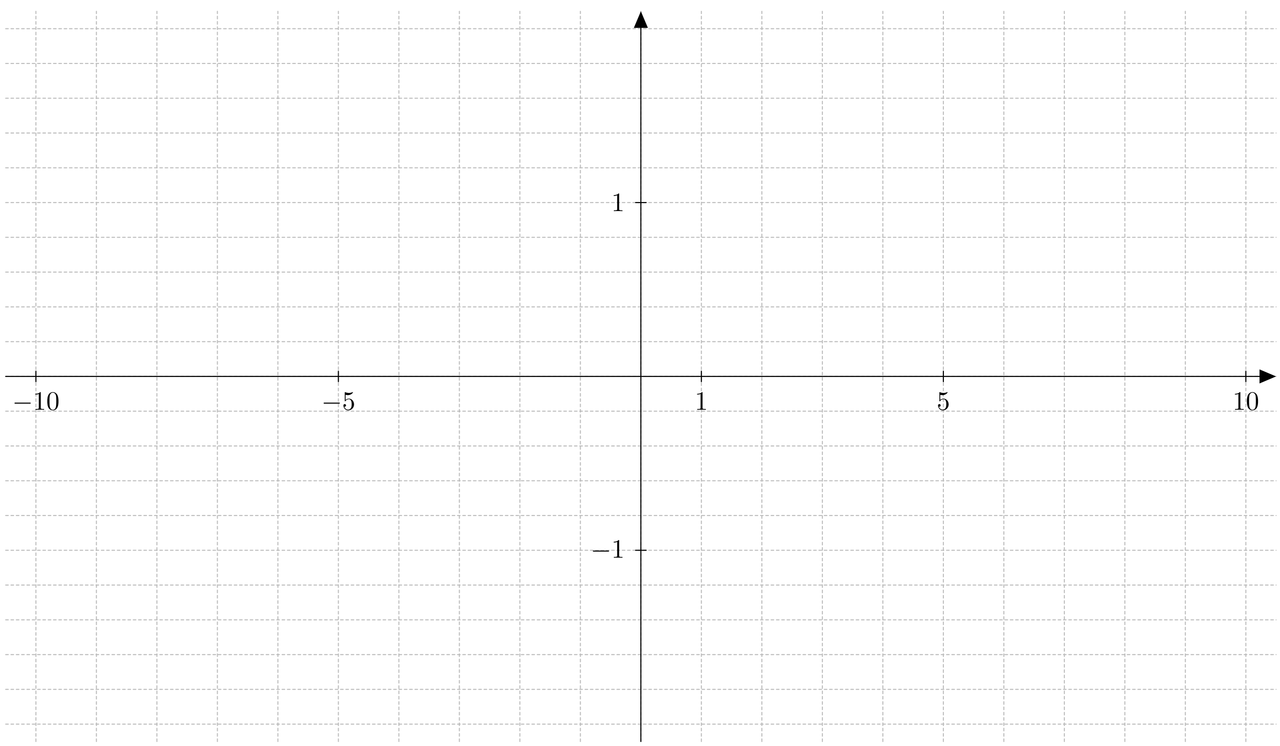
— AH :

— AO :

— Dérivée :

— Dérivée seconde :

— Graphe :



V. Exponentielle et logarithme

Aujourd'hui nous revenons de manière plus rigoureuse sur les fonctions exponentielles et logarithmes vues rapidement dans le chapitre sur la continuité. Nous en profiterons pour calculer les dérivées, ce qui étoffera notre catalogue de fonctions "élémentaires" que nous savons dériver.

1 L'exponentielle

Pour construire ce cours sur des bases solides, revenons sur la définition de e^x.

Lemme 1.1. *Lorsque* $m > 2x - 1$*, on a* $\dfrac{x^{m+k}}{(m+k)!} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \dfrac{x^m}{m!}$ *pour tout* $k \geq 1$*.*

Démonstration. On démontre cela par récurence sur k. Lorsque $k = 1$, on a

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} =$$

Supposons maintenant que l'inégalité est vraie pour $1, 2, \ldots, k$ et montrons qu'elle est aussi vraie pour $k + 1$:

$$\frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)!} =$$

ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 1.2. *Pour tout nombre réel* x*, la suite* $z_r = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{r} \frac{x^n}{n!}\right)$ *converge.*

Démonstration. Effectuons la démonstration lorsque x est positif.
Dans ce cas, la suite z_r est croissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est bornée pour en conclure qu'elle converge. On choisit un nombre entier $m > 2x - 1$ et on écrit

□

Ce résultat permet de poser la définition suivante.

Définition 1.3. Pour tout nombre réel x, le nombre e^x est défini par

$$e^x \;=\; 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \;\overset{x\neq 0}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!}$$

La *fonction exponentielle* est la fonction réelle $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\exp(x)=e^x$.

Les propriétés bien connues de croissance exponentielle peuvent être maintenant démontrées rigoureusement.

Proposition 1.4. *On a* $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ *pour tous* $x,y\in\mathbb{R}$ *et* $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$. *De plus,* $\exp(x)>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

Démonstration. Développons l'expression du produit des exponentielles $\exp(x)\cdot\exp(y)$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^k y^m}{k!m!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{k+m}{k}\frac{x^k y^m}{(k+m)!}$$

Pour le calcul de l'inverse, on remarque que $1=\exp(0)=\exp(x-x)=\exp(x)\cdot\exp(-x)$
Finalement, puisque $\exp(x)=\exp(x/2+x/2)=(\exp(x/2))^2$ est un carré, il doit être positif. □

Exemple 1.5. Nous aimerions comprendre le lien entre $\exp(x)$ et e^x, où e est le nombre d'Euler. Par définition, on a $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$.

D'autre part, nous avons défini e comme étant la limite lorsque n tend vers l'infini de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pourquoi les deux limites $\exp(1)$ et e coïncident-elles ?

Le développement de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donne

Ainsi $e \leq \exp(1)$. Finalement, fixons m et considérons la suite (y_n) où

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{m!}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{n^{m-1}} \quad \text{pour} \quad n > m.$$

Lorsque n tend vers l'infini cette suite tend vers $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!}$.

Puisque $y_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, les limites aussi satisfont l'inégalité $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!} \leq e$.

Ainsi, lorsque m tend vers l'infini on a $\exp(1) \leq e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

La limite considérée est donc à la fois plus grande et plus petite que e, il s'agit donc de e, qui vaut environ $2,718281828459045235360287471352662 5$...

2 Etude de la fonction exponentielle

Proposition 2.1. *La fonction exponentielle est dérivable donc continue. De plus* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. Calculons la dérivée à l'aide de la somme définissant l'exponentielle :

La dérivée est ainsi calculée, ce qui prouve que la fonction est dérivable, et donc continue. $\square$

Proposition 2.2. *On a* $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
De plus, la fonction exponentielle admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = 0$.

Démonstration. Si on a un entier $N > 0$, choisissons $x > 2N$. Alors

$$e^x \ > \ e^{2N} = \qquad\qquad > \frac{(2N)^N}{N!} = \qquad\qquad > 2^N.$$

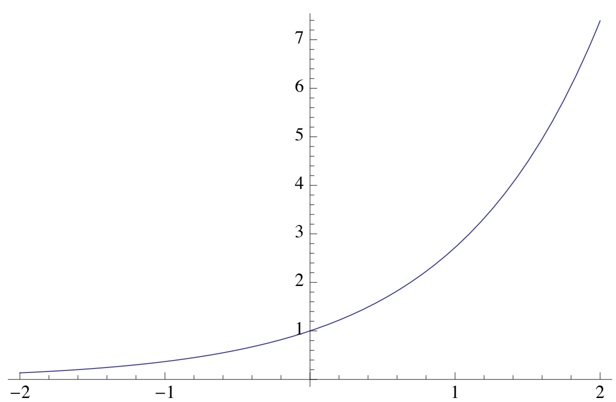
Ainsi e^x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, on utilise le fait que $e^{-x} = 1/e^x$ pour conclure que e^x tend vers zéro. □

Pour terminer notre étude de fonction, étudions la croissance et la convexité.

Proposition 2.3. *La fonction exponentielle est strictement croissante et convexe sur* $\mathbb{R}$.
De plus, il s'agit d'une bijection entre $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La dérivée de e^x est e^x, une fonction strictement positive par définition. Par conséquent l'exponentielle est strictement croissante. Sa dérivée seconde est encore égale à e^x, strictement positive, si bien que l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour terminer, par continuité, le théorème de la valeur intermédiaire s'applique et l'exponentielle est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est injective car strictement croissante. □

Voici le graphe de la fonction exponentielle :



Vous étudierez les fonctions $exp_a(x) = a^x$ en exercice.

3 La fonction logarithme

La fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de l'exponentielle. On l'appelle aussi *logarithme népérien* pour le distinguer des autres fonctions logarithmiques que nous verrons tout à l'heure. Vous avez déjà vu l'année passée que les propriétés élémentaires de l'exponentielle se traduisent pour le logarithme :

1. $\ln(xy) =$
2. $\ln(1) =$ et $\ln(e) =$
3. la fonction ln est strictement croissante ;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

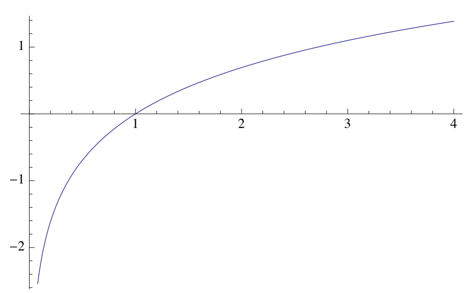
Nous savons aussi qu'elle est aussi continue et dérivable, étant la fonction réciproque d'une fonction dérivable.

Proposition 3.1. *La dérivée de la fonction* ln *est la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Démonstration. Il suffit de calculer la dérivée avec la méthode vue pour les fonctions réciproques :

$\square$

Voici le graphe de la fonction ln :



Il est parfois utile de travailler avec des fonctions logarithmiques définies sur d'autres "bases" que e, les plus courantes étant la base 2 et la base 10.

Définition 3.2. Pour tout nombre réel positif $a \neq 1$, la *fonction logarithme de base* a est la fonction réelle $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\log_a(x) = \qquad\qquad\qquad .$$

Exemple 3.3. Puisque $\ln(e) = 1$, $\log_e$ n'est rien d'autre que le logarithme népérien ln.
On a toujours $\log_a(a) =$.

4 La fonction puissance

Nous savons définir et étudier les fonctions puissance entière $x \mapsto x^n$, où n est un entier, et puissance rationnelle $x \mapsto x^r$, où r est un nombre rationnel.
Nous remarquons que

On définit donc les fonctions puissances de la manière suivante :

Définition 4.1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la *fonction puissance α-ième* $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est définie par

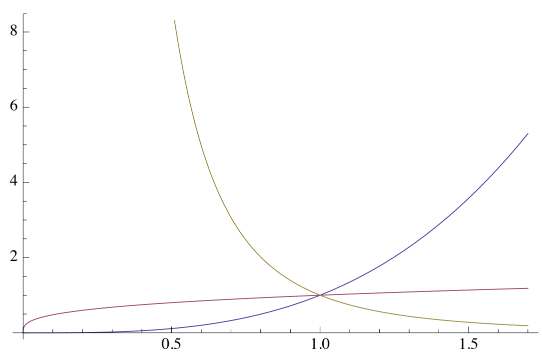
$$f_\alpha(x) =$$

Théorème 4.2. *La dérivée de la fonction puissance est $f'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.*
Cette fonction est donc strictement croissante pour $\alpha > 0$ et strictement décroissante pour $\alpha < 0$.

Démonstration.

$\square$

On voit ci-dessous le graphe des fonctions puissance pour $\alpha = \pi, -\pi, 1/\pi$:



Pour terminer avec les exponentielles, les logarithmes et les puissances, nous allons comparer le comportement asymptotique de ces fonctions. L'année passée, vous aviez eu beaucoup de peine à expliquer pourquoi e^x croît plus vite que x. A présent, grâce à la règle de Bernoulli-L'Hospital, cela devient un jeu d'enfants !

Théorème 4.3. *Si* $\alpha > 1$, *on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

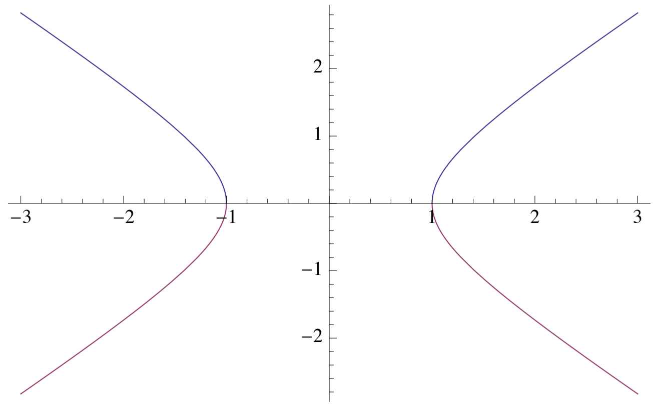
Démonstration. Choisissons un entier $n > \alpha$, qui existe puisque $\mathbb{R}$ est archimédien.
Alors $x^n = e^{n\ln(x)} > e^{\alpha\ln(x)} = x^\alpha$ car

La deuxième limite est encore plus facile à calculer puisqu'il suffit d'appliquer la règle de Bernoulli-L'Hospital une unique fois :

□

5 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions trigonométriques se lisent sur le cercle unité et les fonctions sinus et cosinus permettent de paramétrer ce cercle. Si l'on remplace le cercle unité par une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ on obtient les fonctions trigonométriques ... hyperboliques, eh oui !
La surprise est qu'elles peuvent se formuler de manière paramétrique à l'aide de l'exponentielle !



Définition 5.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
On appelle ces fonctions le *sinus hyperbolique* et le *cosinus hyperbolique*.

Proposition 5.2. *On a pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul en se souvenant des règles de calcul avec l'exponentielle :

□

Ainsi pour $t \geq 0$, les points $(\cosh t, \sinh t)$ parcourent l'arc d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ contenu dans le premier quadrant.

Par analogie avec les fonctions trigonométriques classiques, on définit les quotients suivants :

Définition 5.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ si $x \neq 0$.

On appelle ces fonctions la *tangente hyperbolique* et la *cotangente hyperbolique*.

Exemple 5.4. Effectuons par exemple l'étude de la fonction tangente hyperbolique.
Il s'agit d'une fonction impaire dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$. En effet

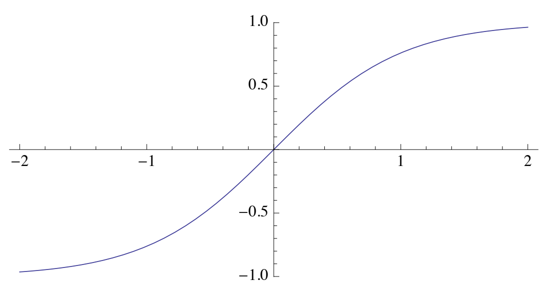
$$\tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\tanh x$$

— Asymptotes :

— Dérivée :

— Dérivée seconde :

Voici son graphe :



La pente de la tangente en l'origine vaut 1, le graphe fait donc un angle de $\pi/4$ avec l'axe horizontal.

VI. Exponentielle complexe

L'année dernière, vous avez fait connaissance avec les nombres complexes. Vous avez appris à les additionner, les multiplier, à en calculer des puissances et des racines n-ème.
Aujourd'hui nous allons étudier formellement l'exponentielle complexe, dont vous avez eu un aperçu, ce qui nous amènera à voir rigoureusement son lien avec la trigonométrie classique. Nous reviendrons ensuite sur les fonctions de trigonométrie hyperbolique pour remarquer les analogies entre le sinus et sa version hyperbolique.
Finalement, nous verrons qu'il est possible de décrire toutes les similitudes du plan à l'aide de fonctions complexes.

1 L'exponentielle d'un nombre complexe

Pour définir l'exponentielle d'un nombre réel x, nous avons utilisé la série de terme $\dfrac{x^n}{n!}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous admettons que cette somme infinie converge aussi lorsqu'on remplace le nombre réel x par un nombre complexe z arbitraire.

Définition 1.1. La fonction *exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qu'on note aussi e^z.

Pour se rendre compte de la difficulté du calcul de l'exponentielle complexe, regardons un cas où il est aisé de calculer les puissances successives de z.

Exemple 1.2. Lorsque $z = i$, nous savons calculer les puissances i^n pour tout n. En effet,

Il se trouve que ces sommes infinies donnent environ $0.540302306 + 0.841470985 \cdot i$.

Comment pouvons-nous essayer de comprendre géométriquement cette exponentielle complexe ? Nous allons d'abord établir quelques formules analogues à celles que nous avons démontrées dans le cas réel.

Proposition 1.3. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors*

a) $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ *;*

b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Démonstration. Une fois que nous avons admis que la somme infinie qui définit l'exponentielle a un sens pour les nombres complexes, la preuve de la première formule est identique à celle effectuée dans le cadre réel : l'exponentielle d'une somme est égal au produit des exponentielles. Pour démontrer que le conjugué complexe de l'exponentielle est l'exponentielle du conjugué, il suffit de se rappeler que

$$\forall w, w' \in \mathbb{C}, \qquad 1)\ \overline{w + w'} = \qquad\qquad\qquad , \quad 2)\ \overline{w \cdot w'} = \qquad\qquad\qquad ,$$

et d'observer que

$$\overline{e^z} \quad = \quad \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} \quad = \quad e^{\overline{z}}$$

□

Corollaire 1.4. *Pour tout nombre réel t, le nombre complexe e^{it} est de module* 1.

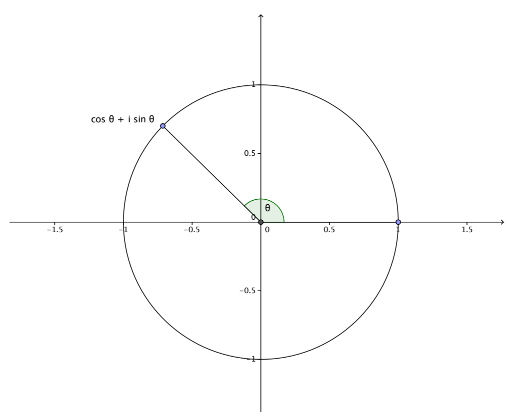
Démonstration.

□

On sait donc qu'il existe un angle θ tel que $e^{it} = \cos\theta + i\sin\theta$. La partie la plus difficile de cette analyse de l'exponentielle complexe consiste à trouver de quel angle il s'agit. Pour cela il faut soit étudier le développement en séries de Taylor des fonctions réelles, soit connaître mieux la théorie des fonctions complexes. Nous allons donc tricher légèrement...

Théorème 1.5. *Pour tout nombre réel t, on a $e^{it} = \cos t + i\sin t$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f(t) = \dfrac{e^{it}}{\cos t + i\sin t}$.



□

On en déduit la célèbre formule qui utilise à la fois 0, 1 et e, i et π :

Corollaire 1.6. Formule d'Euler.
On a

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Démonstration. Nous savons que $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$. $\square$

2 Le logarithme complexe

La compréhension de l'exponentielle complexe amène aussi des simplifications de notation et de calcul. En effet, un nombre complexe de module r et d'argument t peut s'écrire $z = re^{it}$. D'autre part, si $z = a+bi$, alors $e^z = e^a \cdot e^{bi}$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, on décide de restreindre le domaine de définition de l'exponentielle à $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$. En effet, si $z = a + bi$ et $w = a + (b + 2k\pi)i$, alors

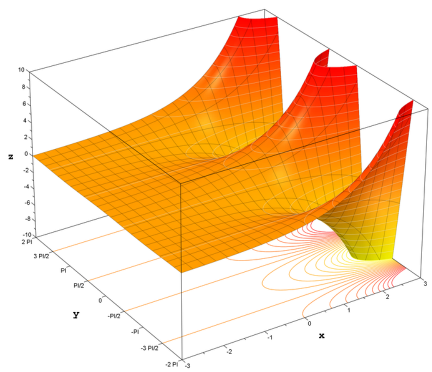
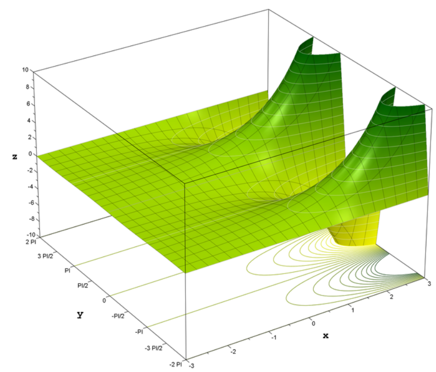
Soit U la bande horizontale du plan complexe de largeur 2π définie par

$$U = \{a + bi \,|\, a \in \mathbb{R}, 0 \leq b < 2\pi\}.$$

Théorème 2.1. *La fonction exponentielle* $\exp : U \to \mathbb{C}^*$ *est une bijection.*

Démonstration. Il faut commencer par observer que e^z n'est jamais nul. Il s'agit en effet d'un nombre complexe de module $e^{Re(z)}$, qui n'est jamais nul. Pour voir que l'exponentielle complexe est injective, il faut montrer que si $e^z = e^w$ pour $z = a + bi$ et $w = c + di$ dans U, alors $z = w$.
Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument. Leur module vaut respectivement e^a et e^c. Comme l'exponentielle réelle est injective, on en déduit que $a = c$. Leur argument vaut respectivement b et d, deux nombres compris entre 0 et 2π qui doivent donc être égaux.
Montrons enfin la surjectivité. Soit v un nombre complexe non nul. Son module est r et son argument θ est choisi entre 0 et 2π. Alors $z = \ln r + i\theta$ est un nombre complexe dans U tel que $e^z = v$. $\square$

Voici les graphes des fonctions réelles d'une variable complexe qui associent respectivement au nombre complexe z la partie réelle et la partie imaginaire de e^z.

On pourrait donc définir le logarithme complexe comme la fonction réciproque de l'exponentielle complexe restreinte à U. En d'autres termes, $\ln(z) = w$ si $w \in U$ est le seul nombre complexe d'argument compris entre 0 et 2π tel que $e^w = z$.

Exemple 2.2. Dans ce cas, on calcule que $\ln(2i) =$ en posant

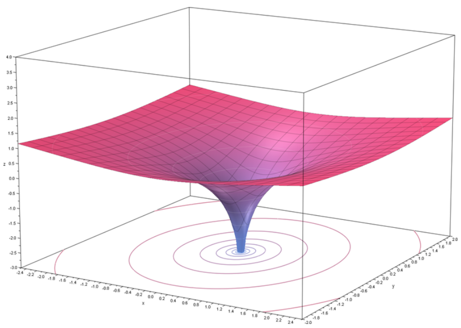
$\ln(2i) = a + bi \;\Leftrightarrow\; 2i =$

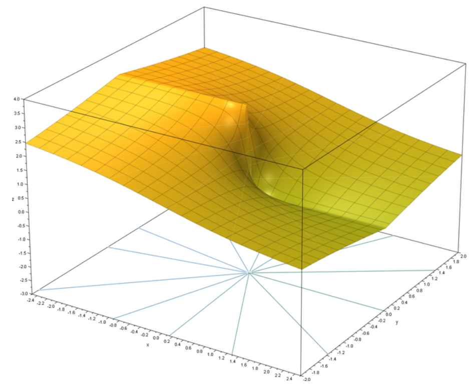
Toutefois, ce qu'on fait usuellement ne coïncide que partiellement avec la définition du logarithme complexe donnée ci-dessus qui n'est pas une fonction continue sur tout $\mathbb{C}^*$. En effet, considérons des points proches de 1 de part et d'autre de l'axe réel sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine et écrivons-les respectivement $e^{i\,\varepsilon}$ et $e^{i\,(2\pi-\varepsilon)}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement proche de 0. Ces deux nombres sont arbitrairement proches de 1, mais leurs images par le logarithme complexe défini ci-dessus valent respectivement

Remarque 2.3. Pour définir la *détermination principale du logarithme complexe* sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on écrit tout nombre complexe z qui n'est pas un nombre réel négatif ou nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$ et . On pose alors

$$\ln(z) = \ln r + i\theta.$$

Voici les graphes des fonctions parties réelles et parties imaginaires du logarithme complexe :





Attention ! Les propriétés très caractéristiques du logarithme népérien ne sont plus toujours vraies dans le cadre complexe !

Exemple 2.4.

$\ln(e^{10\pi\, i}) \neq 10\pi\, i$ car $e^{10\pi\, i} =$ d'où $\ln(e^{10\pi\, i}) =$

$$= \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{3i\frac{\pi}{4}}) \neq \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}}) + \ln(e^{3i\frac{\pi}{4}}) =$$

3 Trigonométrie classique et hyperbolique

Nous nous souvenons que la fonction exponentielle nous a permis de définir les fonctions cosinus et sinus hyperboliques :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Nous avons vu, ou plutôt admis, que $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Ce lien entre l'exponentielle complexe et la trigonométrie classique va nous permettre d'exprimer le cosinus et le sinus de manière analogue au cas hyperbolique, en remplaçant simplement l'exponentielle réelle par l'exponentielle complexe.

Proposition 3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

Démonstration. Nous traiterons simplement le cas du sinus.

□

4 Les similitudes du plan

Identifions le plan $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, le couple (a, b) correspondant à $a + bi$. Notre compréhension de l'addition et de la multiplication complexe nous permet d'affirmer que :

1. Additionner un nombre complexe $w = a + bi$ correspond à effectuer

2. Multiplier par un nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ correspond à effectuer

3. Multiplier par un nombre réel $R > 0$ correspond à effectuer

4. La conjugaison complexe correspond à effectuer

En mettant toutes ces observations ensemble nous pouvons en fait décrire *toutes* les similitudes du plan à l'aide des opérations sur les nombres complexes.

Théorème 4.1. *Soit $c = a + bi$ un nombre complexe et R un nombre réel positif.*

a) Toute translation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto z + c$.

b) Toute rotation dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{i\theta} \cdot (z - c) + c$.
Ici c est le centre de la rotation et θ son angle.

c) Toute homothétie dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto R(z - c) + c$.
Ici R est le rapport de l'homothétie et c son centre.

d) Toute symétrie axiale dans $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto e^{2i\theta} \cdot \overline{z - c} + c$.
Ici l'axe passe par c et son angle avec l'axe réel est θ.

Démonstration. Regardons par exemple le cas des rotations. Pour mieux comprendre qui est l'image de z, appelons τ la translation par $-c$, c'est-à-dire $\tau(z) = z - c$.
Ainsi τ^{-1} est

$\square$

Exemple 4.2. Considérons la transformation du plan complexe donnée par $z \mapsto -2iz - 1 + 2i$.
Il s'agit de la composition de

Comment la décrire ? Commençons par chercher ses points fixes.

On pose $z = a + b\,i$ et on résout l'équation $z = -2iz - 1 + 2i$

L'unique point fixe est $c = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,i$.

Par les points a), b) et c) du théorème 4.1, on peut écrire l'image de z de la façon suivante :

$$z \mapsto -2i\,(z - c) + c$$

et affirmer que cette transformation géométrique est la composition

Pour conclure, voici la forme générale de toute similitude du plan complexe. Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, l'écriture donnée a priori nécessite souvent quelques calculs pour comprendre géométriquement de quelle transformation il s'agit et en obtenir une écriture plus lisible.

Corollaire 4.3. *Toute similitude du plan s'écrit sous l'une des deux formes*

$$z \mapsto w \cdot z + c \qquad \textit{ou} \qquad z \mapsto w \cdot \overline{z} + c$$

avec $w \neq 0$ et c deux nombres complexes.

VII. Optimisation et primitives

Nous revenons aujourd'hui sur les fonctions trigonométriques hyperboliques et parlerons de leurs réciproques dont vous avez vus quelques exemples en exercice dans la série précédente. Nous parlerons ensuite de problèmes d'optimisation, l'une des applications les plus pratiques de la théorie de la dérivation.

1 Fonctions hyperboliques réciproques

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh x = \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad \cosh x =$$

Ces fonctions ont été étudiées en exercice la semaine passée et vous avez vu que

$$\sinh' x = \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad \cosh' x =$$

Dans la série de la semaine passée, vous avez étudié la fonction réciproque de sinh, notée Argsinh. Vous avez entre autres dû montrer que $\mathrm{Argsinh} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et que $\mathrm{Argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Il reste donc à étudier la fonction Argcosh.

Définition 1.1. La fonction Argcosh : $[1, \infty[\to [0, \infty[$ est la fonction réciproque de cosh sur $[0, \infty[$.

Calculons la dérivée de cette fonction.

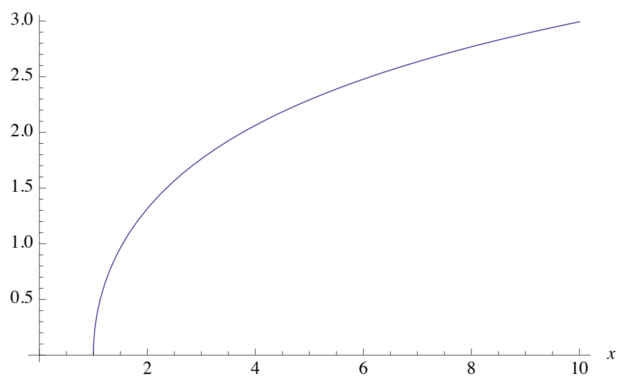
Proposition 1.2. *On a* $\mathrm{Argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de la dérivée d'une fonction réciproque. Ainsi, si $y = \text{Argcosh}(x)$, on a

$$\text{Argcosh}'(x) =$$

□

On en déduit que la fonction Argcosh est strictement croissante. Voici son graphe :



Pour terminer, nous donnons la liste des dérivées de ces fonctions hyperboliques :

Proposition 1.3. *On a*

$\sinh' x = \cosh x$	$\text{Argsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh' x = \sinh x$	$\text{Argcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\text{Argtanh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\coth' x = 1 - \coth^2 x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\text{Argcoth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

Remarque 1.4. Comment se fait-il que la dérivée des réciproques de la tangente hyperbolique et celle de la cotangente hyperbolique soient égales ? Y aurait-il une faute de frappe ?

2 Optimisation

Les méthodes de dérivation et la connaissance de la croissance d'une fonction permettent souvent de résoudre de manière analytique des problèmes d'optimisation. La méthode consiste bien souvent à trouver en fonction du problème posé une fonction dont on cherchera le maximum ou le minimum. Commençons par un grand classique.

Exemple 2.1. La fabrique Bischofszell cherche à produire une boîte de conserve en fer blanc contenant un litre, soit 1000 cm^3, de petits pois en utilisant le moins de matière possible.
Quelles seront ses dimensions ?

Appelons r le rayon du disque de base et h la hauteur de la boîte, en centimètres.

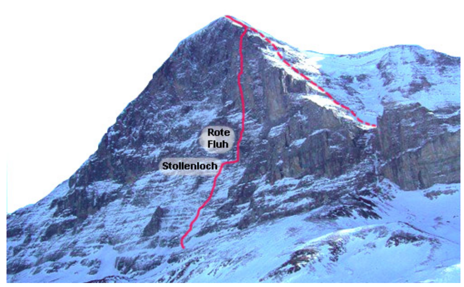
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$, mais les boîtes de conserve de rayon négatif n'intéressent pas Bischofzell. On restreint donc $D(S)$ à $\mathbb{R}_+^*$.
Calculons la dérivée de S :

Il suffit maintenant de calculer h pour connaitre les dimensions de la boîte de petits pois :

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \cong 10,84 \text{ cm}.$$

Abordons maintenant un exemple de nature plus physique où nous nous intéresserons aussi à la dérivée seconde.

Exemple 2.2. On se trouve dans la face Nord de l'Eiger, de 1650 mètres de hauteur. Au moment d'arriver au sommet, à 3970 mètres d'altitude, un petit boulon d'un gramme se détache des crampons et tombe directement jusqu'au bas de la face.
A quel instant atteint-il une vitesse maximale ?



Nous devons d'abord établir l'équation de sa position $h(t)$, comprise entre 3970 et 2320.
Idéalement, sans frottement,

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 3970$$

car la vitesse initiale est nulle et $g = 9,81 m/s^2$ est l'accélération de la pesanteur.

Disons que $g = 10$ et donc $T^2 = \dfrac{1650}{5} = 330$ et $T \cong 18,1$ secondes.

A ce moment $|v(T)| = gT \cong 181$ m/s, autrement dit plus de 650 km/h.

En réalité, il faudrait tenir compte des frottements dû à la viscosité de l'air, à la forme du boulon...

3 Primitives

Nous savons tout, ou presque, sur la dérivation. Nous terminons ce cours avec une première approche de l'intégration, en étudiant la "réciproque de la dérivation", c'est-à-dire en cherchant pour une fonction donnée quelles fonctions admettent cette fonction pour dérivée.

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ou plus généralement sur une partie de $\mathbb{R}$.
Une fonction dérivable F est une *primitive* de f sur $[a, b]$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Proposition 3.2. *Deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante.*

Démonstration.

□

Définition 3.3. Si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, l'ensemble de toutes ses primitives se note $\int f(x)dx$ et on l'appelle *intégrale indéfinie* de f.

Intégrer une fonction sur un intervalle, c'est chercher toutes ses primitives sur cet intervalle. Si F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$, toute primitive de f sur $[a, b]$ est de la forme $F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. On convient donc d'écrire

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.4. On sait qu'un corps tombe en chute libre avec une accélération constante g. Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, on en déduit que la vitesse

$$v(t) =$$

où v_0 est une constante. Il s'agit de la "vitesse initiale" puisque

Pour trouver la position $x(t)$ de notre objet, il faut intégrer encore une fois car la vitesse est la dérivée de la position. Ainsi,

$$x(t) =$$

où x_0 est une constante réelle. Cette constante représente la "position initiale" de l'objet.

Toutes les dérivées que nous avons calculées nous permettent de trouver de nombreuses primitives. Ainsi, le tableau suivant donne les primitives de quelques fonctions : puissances pour $\alpha \neq -1$, trigonométriques, exponentielles, etc. La lettre c indique une constante réelle dans tous les cas.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
$\cos x$	
$\sin x$	
e^x	
a^x avec $a > 1$	

Voici ensuite les règles de base pour calculer les primitives de fonctions obtenues comme combinaisons linéaires de fonctions plus simples. La dernière partie résume les trois autres et nous apprend que le calcul de primitive est *linéaire* : la primitive d'une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des primitives de ces fonctions.

Proposition 3.5. *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

a) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ *;*

b) $\displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ *;*

c) $\displaystyle\int (\lambda f(x))\, dx = \lambda \int f(x)dx$ *;*

d) $\displaystyle\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$

Démonstration.

□

Exemple 3.6. On cherche à trouver toutes les primitives de la fonction polynomiale

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Puisque la primitive de x^k est de la forme $\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}$, on déduit de la proposition ci-dessus que

$$\int p(x)dx = \int a_n x^n dx + \cdots \int a_1 x dx + \int a_0 dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c$$

Par exemple,

$$\int (x+1)^2 dx =$$

La règle de la dérivation d'une composition de fonctions implique le résultat suivant.

Proposition 3.7. *Soient f et g deux fonctions réelles. Alors, si G est une primitive de g,*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = (G \circ f)(x) + c.$$

Démonstration. Il suffit de constater que $G \circ f$ est une primitive de $(g \circ f) \cdot f'$. $\square$

Un cas particulier très utile de cette règle est celui où G est une fonction puissance.

Corollaire 3.8. *Soient f une fonction réelle et k un entier positif. Alors*

$$\int f^k(x) \cdot f'(x)dx =$$

Exemple 3.9. La fonction $\cos^3 x \cdot \sin x$ admet comme primitive

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x \; dx =$$

On peut aussi recalculer sans développer l'exemple polynomial de tout à l'heure :

$$\int (x+1)^2 dx =$$