Corrigé série 3

Exercice 1 (5 points)

$$\begin{aligned}
&P(\text{sur les 5 problèmes tirés, au moins 4 sont connus})\\
&= P(\text{sur les 5, exactement 4 sont connus}) + P(\text{sur les 5, exactement 5 sont connus})\\
&= \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points)

On note par E_i l'événement "le joueur tire la boule i". Clairement, la probabilité de E_i est

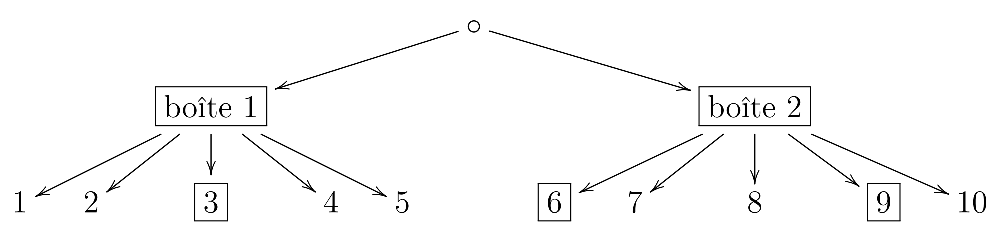
$$P(E_i) = \frac{1}{10}.$$

Dès lors,

$$P(\text{le joueur gagne}) = P(E_3 \sqcup E_6 \sqcup E_9) = 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

De plus, on a aussi

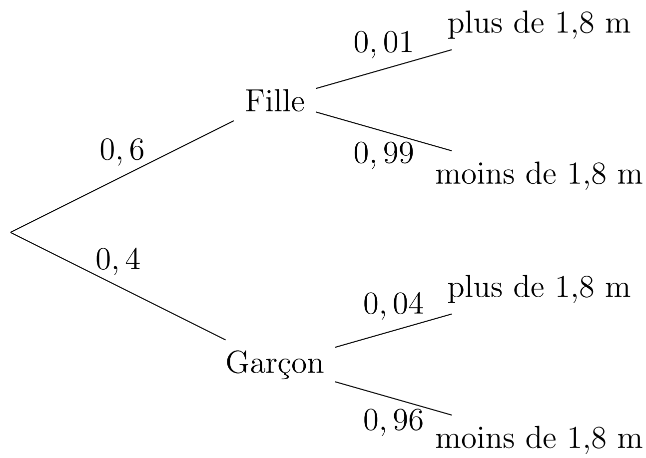
$$P(\text{le joueur gagne}|\text{le joueur a choisi la } 1^{\text{ère}} \text{ boîte}) = \frac{1}{5},$$
$$P(\text{le joueur gagne}|\text{le joueur a choisi la } 2^{\text{ème}} \text{ boîte}) = \frac{2}{5}.$$



Dans cet arbre, chaque branche a une probabilité de $\frac{1}{10}$.

Exercice 3 (5 points)

On peut s'aider d'un arbre :



On a alors (par la formule de Bayes)

$$P(\text{Fille} \mid \text{plus de 1,8 m}) = \frac{P(\text{Fille et plus de 1,8 m})}{P(\text{plus de 1,8 m})} = \frac{0,6 \cdot 0,01}{0,6 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,04} \approx 0,2727 = 27,27\%$$

Exercice 4 (5 points)

Listons tous les cas possibles :

$$ggg, ggf, gfg, gff,$$
$$fgg, fgf, ffg, fff.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} P(\text{deux garçons}|\text{au moins une fille}) &= \frac{P(\text{deux garçons et au moins une fille })}{P(\text{au moins une fille})} \\ &= \frac{P(\text{deux garçons et une fille })}{P(\text{au moins une fille})} \\ &= \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Exercice 5 (5 points)

Donnons des noms aux faces de chaque carte. On appellera n_1 et n_2 les deux faces de la carte noire, b_1 et b_2 les deux faces de la carte blanche. Enfin, $\widetilde{n}$ sera le côté noir de la carte noire et blanche, et $\widetilde{b}$ sera son côté blanc.

Après avoir tiré une carte du chapeau, on observe un des ses côtés, on observe donc de manière équiprobable

$$n_1,\ n_2,\ b_1,\ b_2,\ \widetilde{n},\ \text{ou}\ \widetilde{b}.$$

Sachant que la face observée est blanche, cet ensemble se restreint à

$$b_1,\ b_2,\ \text{ou}\ \widetilde{b}.$$

En particulier, on n'observera une face blanche que dans 3/6 des cas.

On calcule maintenant, avec la définition de la probabilité conditionnelle,

$$P(\text{autre face blanche}|\text{face observée blanche}) = \frac{P(\text{les deux face sont blanches})}{P(\text{face observée blanche})} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$P(\text{autre face noire}|\text{face observée blanche}) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 6 (5 points)

Notons par A l'événement "tu as cinq piques" et par B l'événement "ton partenaire a quatre piques". Dès lors, avec la définition de la probabilité conditionnelle,

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot(B|A) = \frac{\binom{9}{5}\binom{27}{4}}{\binom{36}{9}}\cdot\frac{\binom{27-4}{5}}{\binom{27}{9}} = \frac{567}{3362260} \approx 1.69\cdot 10^{-4}.$$

Exercice 7 (5 points)

Dans la suite b_1, désigne la première boule tirée et b_2 la deuxième boule.

On utilise la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
&P(b_1 \text{ blanche}|b_2 \text{ blanche})\\
&\quad= \frac{P(b_2 \text{ blanche}|b_1 \text{ blanche})P(b_1 \text{ blanche})}{P(b_2 \text{ blanche}|b_1 \text{ blanche})P(b_1 \text{ blanche}) + P(b_2 \text{ blanche}|b_1 \text{ noire})P(b_1 \text{ noire})}\\
&\quad= \frac{2/7\cdot 2/3}{2/7\cdot 2/3 + 1/7\cdot 1/3} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Exercice 8 (5 points)

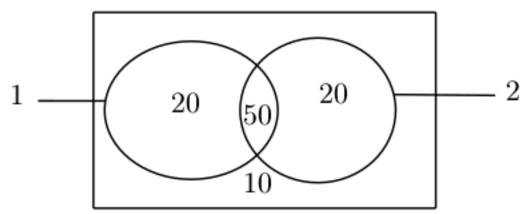
On peut s'aider d'un arbre pour faire cet exercice.

a) $P(\text{beau les 3 jours suivants}) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 51.2\%$

b) $P(\text{beau dans 3 jours}) = 0.8^3 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.512 + 0.064 + 0.064 + 0.048 = 68.8\%$

Exercice 9 (5 points)

On s'aide d'un diagramme de Venn qui représente les probabilités que les salles sont occupées :



a) $P(\text{1ère libre}) = 30\%$

b) $P(\text{les 2 sont libres}) = 10\%$

c) $P(\text{une des 2 au moins est libre}) = 50\%$

d) $P(\text{une seule est libre}) = 40\%$

e) $P(\text{2ème libre} \mid \text{1ère occupée}) = \dfrac{P(\text{1ère occupée et 2ème libre})}{P(\text{1ère occupée})} = \dfrac{20}{70} \cong 28,57\%$

Exercice 10 (5 points)

On a

$$\begin{aligned} P(\text{détecte}|\text{malade}) &= 0.95, \\ P(\text{détecte}|\text{sain}) &= 0.01, \\ P(\text{malade}) &= 0.005, \\ P(\text{sain}) &= 0.995. \end{aligned}$$

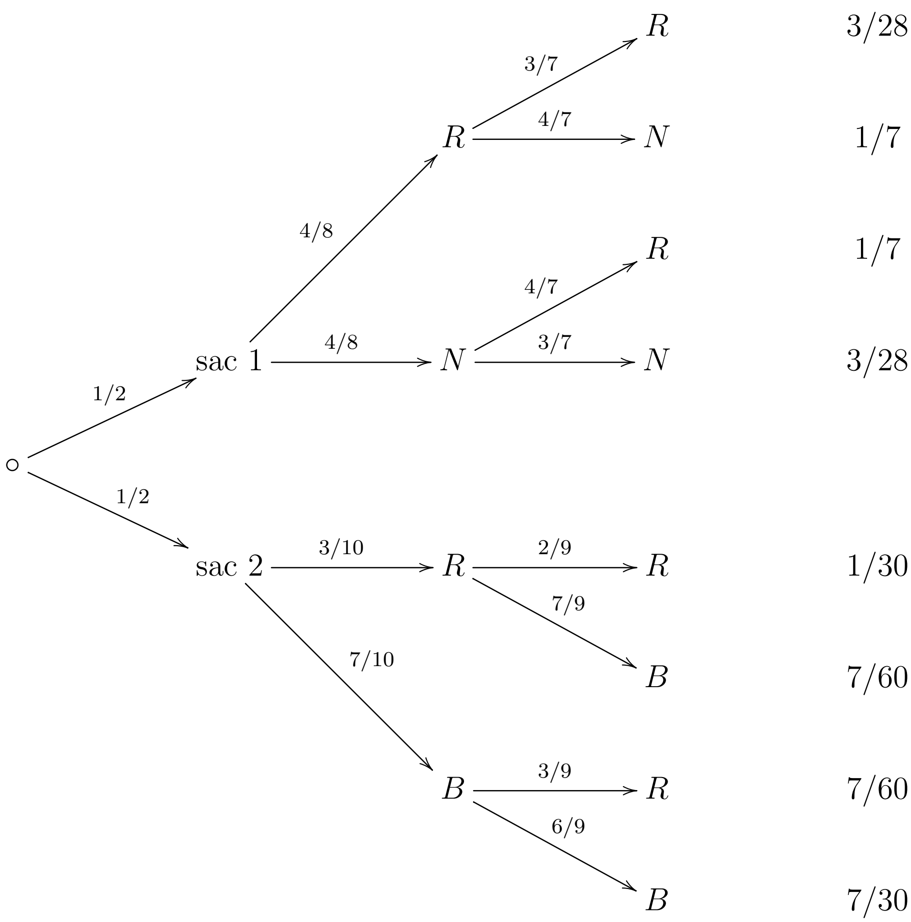
Remarque : On peut s'aider d'un arbre pour obtenir ces probabilités.

Ainsi, en utilisant la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P(\text{malade}|\text{détecte}) &= \frac{P(\text{détecte}|\text{malade})P(\text{malade})}{P(\text{détecte}|\text{malade})P(\text{malade}) + P(\text{détecte}|\text{sain})P(\text{sain})} \\ &= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} \approx 0.323. \end{aligned}$$

Exercice 11 (10 points)

1. Pour cet exercice, le plus simple est de faire un arbre :



   (a) P(1 boule)$=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{2}{7}\cong 28,57\%$

   (b) P(couleurs diff)$=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{7}{60}+\dfrac{7}{60}=\dfrac{109}{210}\cong 51,9\%$

   (c) P(mêmes couleurs)=1− P(couleurs diff)$=1-\dfrac{109}{210}=\dfrac{101}{210}\cong 48,09\%$

   (d) P(au moins une rouge)$=\dfrac{3}{28}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{7}{60}+\dfrac{7}{60}=\dfrac{277}{420}\cong 65,95\%$

   (e) P(sac 2 | couleurs diff)$=\dfrac{\text{P(sac 2 et couleurs diff)}}{\text{couleurs diff}}=\dfrac{\frac{7}{60}+\frac{7}{60}}{\frac{109}{210}}=\dfrac{49}{109}\cong 44,95\%$

2. On a

$$\text{P(pas de rouge)} = \frac{7}{10} = 0,7 \text{ et P(au moins une rouge après n tirages)} = 1 - (0,7)^n.$$

Pour trouver n, on peut faire des essais successifs ou résoudre l'équation avec un logarithme :

$$1 - (0,7)^n = 0,95 \Leftrightarrow (0,7)^n = 0,05 \Leftrightarrow n \ln(0,7) = \ln(0,05) \Leftrightarrow n \cong 8,399$$

Il faut donc itérer l'expérience au moins 9 fois.

Exercice 12 (5 points)

D'abord par simple comptage :

$$P(\text{black jack}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{32}{663} \approx 0.05.$$

Puis, pour faire selon la deuxième méthode, commençons par appeler

A_1 l'événement "*la 1ère carte est un as*",

A_2 l'événement "*la 2ème carte est un as*",

F_1 l'événement "*la 1ère carte est une figure ou un dix*", et

F_2 l'événement "*la 2ème carte est une figure ou un dix*".

Ainsi

$$\begin{aligned} P(\text{black jack}) &= P((A_1 \cap F_2) \sqcup (F_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(F_2|A_1) + P(F_1)P(A_2|F_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} + \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} \\ &= \frac{32}{663} \approx 0.05. \end{aligned}$$

Exercice 13 (5 points)

a) Commençons par remarquer que $P(E \cap F) \leq P(F)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap S) = P(F \cap (E \sqcup E^c)) = P((F \cap E) \sqcup (F \cap E^c)) \\ &= P(F \cap E) + P(F \cap E^c) \geq P(F \cap E). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \leq 1.$$

b)

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

c)

$$\begin{aligned} P\left(\bigsqcup E_i|F\right) &= \frac{P\left((\bigsqcup E_i) \cap F\right)}{P(F)} = \frac{P\left(\bigsqcup (E_i \cap F)\right)}{P(F)} \\ &= \sum \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)} = \sum P(E_i|F). \end{aligned}$$