Analyse 1

(MATH-101(g))

Sections MX - EL - CGC

EPFL - Automne 2024

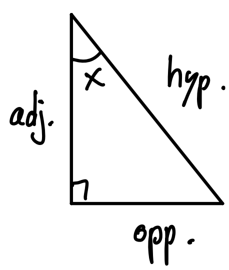
Professeur : Lénaïc Chizat

- But du cours
- Organisation :
  - 1 ECTS $\simeq$ 1h30 travail / semaine
  - 6 ECTS $\leadsto$ 9h00 travail/semaine (3h cours / 1h30 exercices / 4h30 travail perso)
  - série d'exercice :
    - libérée le jeudi
    - séance le lundi matin à 10h
    - correction libérée le lundi midi
  - 22 assistants
  - séances de soutien
  - Examen : QCM + questions ouvertes (ni documents, ni calculatrice).

Prélude (Rappels pour la série 1)

Fonctions trigonométriques :

- Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

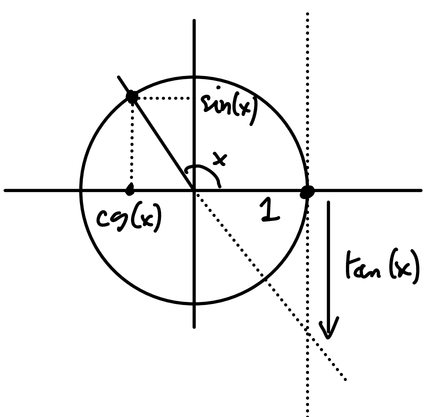


$$\sin(x) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{opp.}}{\text{adj.}}$$

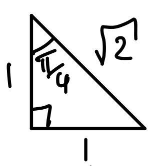
- Si $x \in \mathbb{R}$



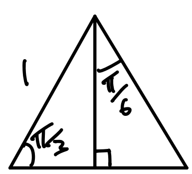
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

A connaître :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0



triangle rectangle isocèle



triangle équilatéral

Se souvenir que
$$\begin{cases} \sqrt{2} \simeq 1,414\ldots \\ \sqrt{3} \simeq 1,732\ldots \end{cases}$$

Exponentielle et Logarithme

Exp : l'unique solution f de $\begin{cases} f'(x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

"Vraie" définition : $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ (notion vue plus tard)

$= \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$ (de même)

En particulier : $\exp(1) = e = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ constante d'Euler

Log : fonction réciproque de l'exponentielle, c'est-à-dire :

$$\log(\exp(x)) = x \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\log(x)) = x \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ x > 0$$

($\log(x)$ = logarithme Népérien, aussi parfois noté $\ln(x)$, $\mathrm{Log}(x)$)
(vient de John Napier)

Généralisation : pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

"est égal à par définition"

- On définit $a^x := \exp(x \log(a)) = e^{x \log(a)}$

- Pour $a > 0$, $a \neq 1$ fixé, la réciproque de a^x est

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$ (exo : le vérifier à partir de la propriété de réciprocité).

Pour $a > 1$, on l'appelle le "logarithme en base a".

Règles de calcul : ($a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y} \end{cases} \qquad \begin{cases} (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-x} \\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \end{cases}$$

Pour n entier, on a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ (aussi valide pour a négatif)

Racine n-ième : $\underbrace{\sqrt[n]{a} = a^{1/n}}_{\text{l'unique nombre positif tel que } \left(a^{1/n}\right)^n = a}$.

Règles de calcul du logarithme ($a, x, y > 0$)

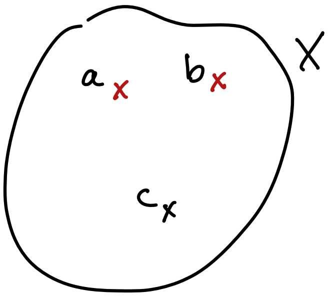
$$\begin{cases} \log_a(1) = 0 \\ \log_a(a) = 1 \\ \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a(1/x) = -\log_a(x) \\ \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x) \quad (\text{pour } b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Chapitre 0 : Notions de base

0.1 Ensembles

Collection d'objets (non-ordonnée, sans répétition).



$X = \{a, b, c\}$

se lit "tel que" (aussi noté ";", ",", ":", "|")

$Y = \{x \in X \; ; \; x$ est de couleur rouge$\}$
$= \{a, b\}$

0.1.1 Notations :

$\in$	appartient à / est un élément de	$a \in X$
$\notin$	n'appartient pas à	$c \notin Y$
$\subset$	est un sous-ensemble de / est inclus dans	$Y \subset X$
$\not\subset$	n'est pas un sous-ensemble de	$X \not\subset Y$
$=$	égalité (ont les mêmes éléments)	$Y = \{a, b\}$
$A \cap B$	: intersection de A et B	$\{a, c\} \cap Y = \{a\}$
$A \cup B$	: union de A et B	$\{a, c\} \cup Y = X$
$A \setminus B$	: "A sans B"	$\{a, c\} \setminus Y = \{c\}$

indique deux notations équivalentes

Ensemble vide : $\emptyset \equiv \{\}$

On a : $\begin{cases} \emptyset \subset X \\ X \subset X \end{cases}$ pour tout ensemble X

Définition : $\mathcal{P}(X) :=$ l'ensemble des sous-ensembles de X. Aussi appelé "l'ensemble des parties de X" ou "l'ensemble puissance de X".

Exemple : $X = \{a, b, c\}$ (3 éléments)

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$$

"singleton a"

contient $8 = 2 \times 2 \times 2$ éléments.

Remarques :
- $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, b\}$
- $\{a\} \subset X$, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

0.1.2. Le produit cartésien

Soient X, Y, Z des ensembles.

"tel que" "et"

$$X \times Y = \{\underbrace{(x,y)}_{\text{un "couple", l'ordre est pris en compte.}} \; ; \; x \in X, \; y \in Y\}$$

Exemple : $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \quad (4 \text{ éléments})$$

En général, $X \times Y \neq Y \times X$ (sauf si $Y = X$)

Plus généralement : $X \times Y \times Z = \{\underbrace{(x,y,z)}_{\text{triplet}} \; ; \; x \in X, y \in Y, z \in Z\}$

triplet (plus généralement, on appelle $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n-uplet.)

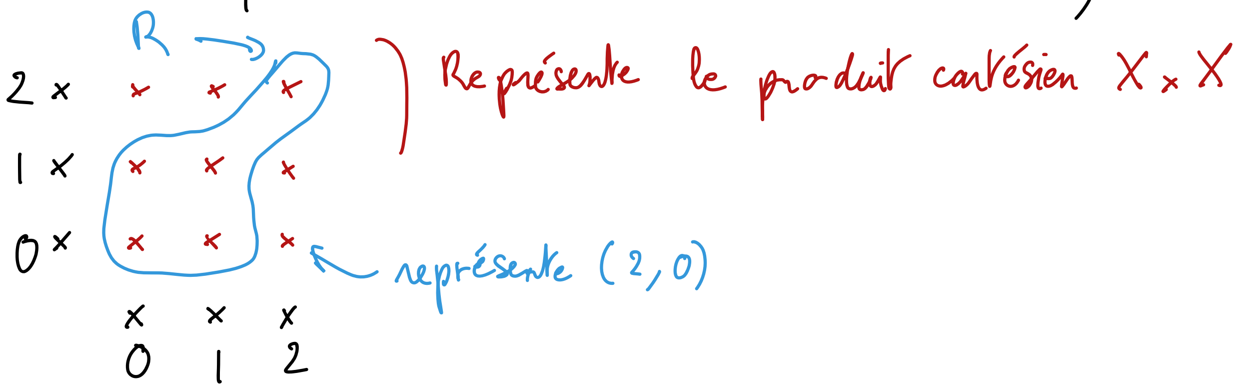
Autre exemple :

$$X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Définition (Relation) : Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation.

Exemple : $X = \{0, 1, 2\}$

Prenons $R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$



Plus généralement, une relation sur $X \times Y$ est la donnée de $R \subset X \times Y$.

fin cours 09/09

0.1.3 Relations et classes d'équivalence

Notations : $\begin{cases} \forall \text{ signifie "pour tout"} \\ \exists \text{ signifie "il existe".} \end{cases}$