Formules de trigonométrie circulaire (souligné : formule à connaître en priorité)

Soient $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{R}$ (tels que les fonctions soient **bien définies**) et $n \in \mathbb{N}$.
La parfaite connaissance des graphes des fonctions trigonométriques est nécessaire.

Relations fondamentales

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $\qquad -\frac{d}{dx}\operatorname{cotan}(x) = 1 + \operatorname{cotan}^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ $\qquad \frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arccotan}(x) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$

x en radians	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\pm\infty$

Il faut savoir linéariser à l'aide des formules d'Euler $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$; de même, développer se réalise à partir des formules de Moivre $e^{inx} = (\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

Pour retenir $\cos\left(x \pm n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x \pm n\frac{\pi}{2}\right)$, il suffit de visualiser les axes du cercle trigonométrique : $+\cos$, $+\sin$, $-\cos$ et $-\sin$ (dans le sens trigonométrique). Ajouter $\frac{\pi}{2}$ correspond à avancer dans le sens trigonométrique (ou à **dériver**) ; retrancher $\frac{\pi}{2}$ correspond à ~~avancer~~ reculer dans le sens trigonométrique (ou à **intégrer**). Par exemple : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

Formules d'angle double (se déduisent facilement des formules d'addition)

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Formules du demi-angle

$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\qquad \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$, on a : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Somme, différence et produit

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \tan(p) + \tan(q) &= \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \tan(p) - \tan(q) &= \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

*Procédé mnémotechnique : retenir « coco-**moins**-sisi-sico-cosi » pour l'ordre des fonctions.*

Les produits $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$ s'obtiennent à partir des formules d'addition.