Corrigé série 3 : Applications de l'intégrale.

4 septembre 2024

Exercice 1

$$A(x) = \int 16x \cdot (3x-1) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7 \, dx = 8 \int (6x^2 - 2x) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7 \, dx = (2x^3 - x^2 + 2)^8 + c$$

$$B(x) = \int 5 \cdot \frac{3}{\cos^2(3x)} - 2 \cdot 5 \cdot \sin(5x) \, dx = 5 \cdot \tan(3x) + 2 \cdot \cos(5x) + c$$

$$C(x) = \int \frac{7}{x^2+9} \, dx \; = \; 7 \cdot \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \, dx \; = \; \frac{7}{3} \cdot \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} \, dx \; = \; \frac{7}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$D(x) = -7 \int (5-2x)^{\frac{3}{4}} \, dx \; = \; \frac{-7}{-2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \int (-2) \cdot \frac{7}{4} \cdot (5-2x)^{\frac{3}{4}} \, dx \; =$$

$$2 \cdot (5-2x)^{\frac{7}{4}} + c = 2 \cdot (5-2x) \cdot \sqrt[4]{(5-2x)^3} + c$$

Exercice 2

Démontrer la proposition :

Si f est une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors toutes ses primitives sont paires sur $\mathbb{R}$.

f impaire sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$ et le graphe de f a pour centre de symétrie l'origine O.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx$ et pour toute primitive F de f, on a

$F(0) - F(-t) = \displaystyle\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx = -(F(t) - F(0))$, ce qui implique $F(-t) = F(t)$.

Exercice 3

A partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans un récipient initialement vide avec un débit instantané $d(t) = 2t$ litres par minute.

Simultanément, une partie de cette eau s'échappe avec un débit instantané $v(t) = t^2$ litres par minute, par un trou situé au fond du récipient.

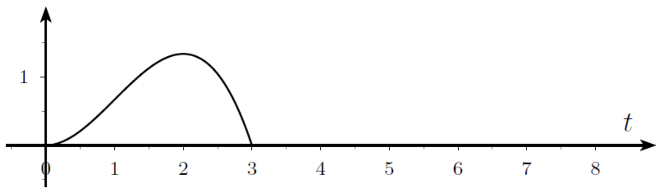
1. Le débit instantané total au temps t = débit entrant - débit sortant = $2t - t^2 = f(t)$ qui est une fonction continue et bornée sur [0,1].

   En découpant l'intervalle [0,1] en n intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ tel que $t_i = \dfrac{i}{n}$, avec $i = 1, 2, \ldots, n$, on calcule que le volume d'eau contenu dans le récipient après 1 minute vaut :

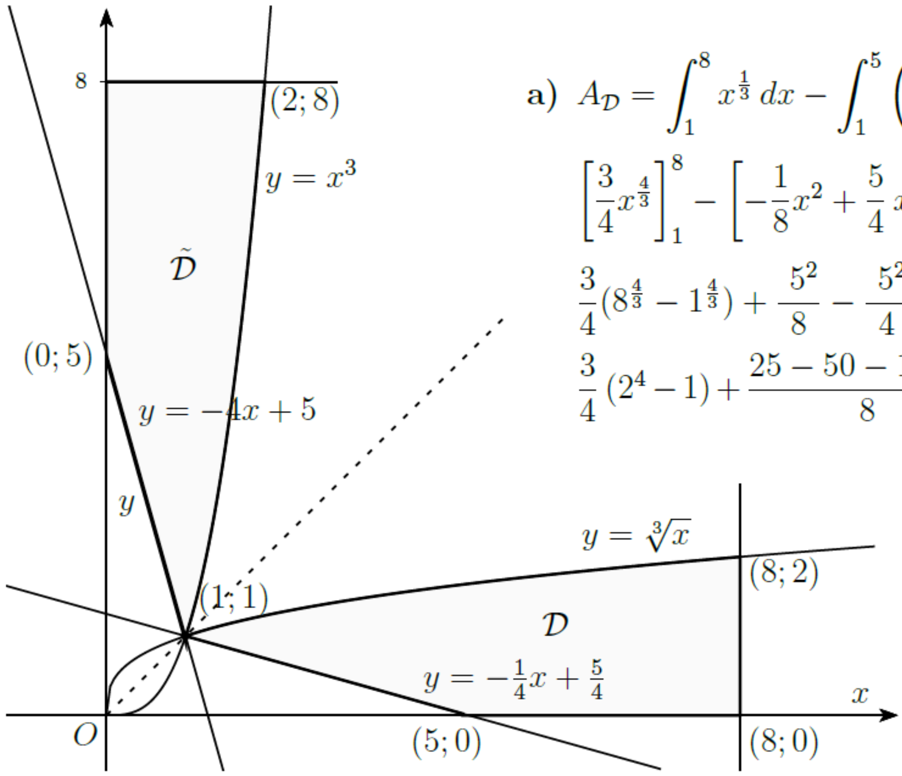
   $V_1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{1}{n} = \int_0^1 2t - t^2 dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \; = \; 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, soit 0.667 litre environ.

2. $V'(t) = 2t - t^2 = t\;(2-t)$ s'annule en $t = 0$ et $t = 2$. V' est positif sur $[0\,;\,2]$, négatif sinon. Donc, $V(t)$ est minimal en $t = 0$ et maximal en $t = 2$.

3. $V(t) = \displaystyle\int_0^t 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^t = t^2 - \frac{t^3}{3} = t^2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$ s'annule en $t = 0$ et $t = 3$.
   Le récipient est à nouveau vide après 3 minutes. Pour $t > 3$, le débit entrant est inférieur au débit sortant. Donc, ces données ne font plus sens.
4. Esquisser du graphe de la fonction V exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps t mesuré en minute, pour t compris entre 0 et l'instant où le récipient est à nouveau vide.



Exercice 4



a) $A_{\mathcal{D}} = \displaystyle\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\, dx - \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx =$

$$\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 - \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}\,x\right]_1^5 =$$

$$\frac{3}{4}(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}) + \frac{5^2}{8} - \frac{5^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} =$$

$$\frac{3}{4}\,(2^4 - 1) + \frac{25 - 50 - 1 + 10}{8} = \frac{45}{4} - 2 = \frac{37}{4}$$

b) $\tilde{\mathcal{D}}$, le symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à la première bissectrice est borné par les graphes des fonctions $f(x) = x^3$, $g(x) = -4x + 5$, l'axe Oy et la droite d'équation $y = 8$. D'où,

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^2 8^2 dx - \int_0^1 (-4x+5)^2\, dx - \int_1^2 x^6 dx = [64x]_0^2 - \left[\frac{1}{-12}\,(-4x+5)^3\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 =$$

$$128 + \frac{1}{12}(1 - 5^3) - \frac{2^7 - 1}{7} = 128 - \frac{31}{3} - \frac{127}{7} = \frac{2688 - 217 - 381}{21} = \frac{2029}{21}.$$

Ainsi le volume de révolution de $\mathcal{D}$ autour de Oy est égal à $\dfrac{2029\,\pi}{21}$.

Exercice 5

1. Volume de la boule $V(t) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d(t)}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d(t)^3$ d'où $V'(t) = \frac{1}{2}\ \pi\ d(t)^2\ d'(t)$.

   Aire de la surface externe de la boule : $A(t) = 4\pi \left(\frac{d(t)}{2}\right)^2 = \pi d(t)^2$

   Comme $V'(t) = k \cdot A(t)$, il vient $\frac{1}{2}\ d'(t) = k \ \Leftrightarrow\ d'(t) = 2k$

   En intégrant, on obtient $d(t) = 2kt + c$.

   Comme $d(0) = 20$, $c = 20$. Puis comme $d(6) = 12k + 20 = 16$, $k = -\frac{1}{3}$.

   Ainsi, finalement, $d(t) = -\frac{2}{3}t + 20$

2. $-\frac{2}{3}t + 20 = 10 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3}t = 10 \ \Leftrightarrow\ t = 15$ mois

3. $-\frac{2}{3}t + 20 = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3}t = 20 \ \Leftrightarrow\ t = 30$ mois

Exercice 6

Cinématique

La vitesse de chute de la pierre, définie sur $[0, t_c]$, vaut

$$v(t) = v(0) + \int_0^t 9.8dx = 0 + 9.8t, \quad t \in [0, t_c].$$

La distance parcourue après t secondes vaut

$$d(t) = d(0) + \int_0^t 9.81\, x\, dx = 0 + \frac{9.8}{2}\, t^2 = 4.9\, t^2, \quad t \in [0, t_c]$$

Ainsi, on peut écrire

$$d(t_c) = h \iff 4.9\, t_c^2 = h \tag{1}$$

La distance parcourue par le son t secondes après l'impact vaut $m(t) = 330\, t$.
Le son est perçu $5.6 - t_c$ seconde après l'impact, d'où la relation

$$m(5.6 - t_c) = h \iff 330\, (5.6 - t_c) = h \tag{2}$$

Il suit de (1) et (2) que

$$h = 4.9\, t_c^2 = 330\, (5.6 - t_c) \ \Rightarrow\ 4.9\, t_c^2 + 330\, t_c - 1848 = 0 \ \Leftrightarrow\ t_c \simeq \frac{-330 \pm \sqrt{145121}}{9.8}.$$

Comme $t_c > 0$, on ne garde que la solution positive, soit $\boxed{t_c \simeq \frac{-330 + \sqrt{145121}}{9.8} \simeq 5.2 \text{ secondes.}}$

La hauteur de chute vaut $\boxed{h = 4.9 \cdot 5.2^2 = 132.43 \text{ mètres.}}$