

Corrigé 2

Exercice 1

Cône de révolution.

(1) Le développement du cône est un secteur de rayon $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ et d'angle au centre $\alpha = \frac{2\pi r}{g}$. Ainsi, $S = \pi g^2 \frac{\alpha}{2\pi} = g^2 \frac{2\pi r}{2g} = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

(2) La hauteur des triangles vaut $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ et leur aire $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{n} g = \frac{\pi r g}{n}$.

$$\text{Ainsi, } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi r g}{n} = \pi r g \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \pi r g \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

(3) Avec le calcul intégral et la formule vue au cours,

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

Exercice 2

Cône de révolution tronqué.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h} x \right) \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{h^2}} dx \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{h^2}} \int_0^h \left(rx + \frac{R-r}{h} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^h = \pi(R+r) \sqrt{(R-r)^2 + h^2} \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $r = 0$, on retrouve la résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3

Tonneau. Calcule l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur $[\pi/6, 5\pi/6]$.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx = 4\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx \\ &= -4\pi \int_{\sqrt{3}/2}^0 \sqrt{1 + u^2} du = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 + \tan^2(s)} \frac{1}{\cos^2(s)} ds = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\cos^3(s)} ds \end{aligned}$$

Or, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos^3(s)} ds &= \frac{1}{\cos(s)} \tan(s) - \int \frac{\sin(s)}{\cos^2(s)} \tan(s) ds = \frac{1}{\cos(s)} \tan(s) - \int \frac{1}{\cos(s)} \tan^2(s) ds \\
 &= \frac{1}{\cos(s)} \tan(s) - \int \frac{1}{\cos(s)} (\tan^2(s) + 1) ds + \int \frac{1}{\cos(s)} ds \\
 &= \frac{1}{\cos(s)} \tan(s) - \int \frac{1}{\cos^3(s)} ds + \int \frac{1}{\cos(s)} ds
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos^3(s)} ds &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos(s)} \tan(s) + \int \frac{1}{\cos(s)} ds \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos(s)} \tan(s) + \ln \left(\frac{1}{\cos(s)} + \tan(s) \right) \right) + C
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 S &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\cos^3(s)} ds \\
 &= 4\pi \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos(s)} \tan(s) + \ln \left(\frac{1}{\cos(s)} + \tan(s) \right) \right) \right|_0^{\sqrt{3}/2} \simeq 12.40385
 \end{aligned}$$

Calcule ensuite son volume.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2(x) dx = \pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx \\
 &= 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx \\
 &= \pi \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\
 &= \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) - \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin(2\pi/6) \right) \\
 &= \pi \frac{\pi}{2} - \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \simeq 1.805176
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- (1) L'aire totale du domaine délimité par le graphe d'une fonction est toujours positive. VRAI, mais l'intégrale ne l'est pas forcément.
- (2) L'aire du cylindre de rayon r et de hauteur $2r$ est plus grande que celle de la sphère de rayon r qu'il contient. FAUX. L'aire du cylindre est $2r2\pi r = 4\pi r^2$, tandis que l'aire de la sphère est aussi $4\pi r^2$.
- (3) Soient D et D' deux domaines de même aire se trouvant dans le plan Oxz . Alors les deux volumes de révolution obtenus en faisant tourner D et D' autour de Ox ont même volume. FAUX. Contre-exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1/3$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Les deux aires sont égales à $1/3$, mais

$$\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \frac{\pi}{5} \neq \pi \int_0^1 g(x)^2 dx = \frac{\pi}{9}$$

- (4) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ est toujours positive (ou nulle) puisqu'elle calcule une aire. FAUX. Contre-exemple $f(x) = -1$ sur $[0, 1]$.

Exercice 5

Volume du cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon r .

$$V = \pi \int_0^h f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \frac{r^2 \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{r^2 \pi}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exercice 6

Calcule le volume de l'hyperboloïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$ pour $-1 \leq z \leq 1$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 f(z)^2 dz = \pi \int_{-1}^1 (1 + z^2) dz = \pi \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8\pi}{3}$$

Exercice 7

Différence de volumes. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ pour tout x . On suppose encore que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. On considère le corps de révolution K obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox les graphes de f et de g .

- (1) Montre que le volume de ce corps de révolution est égal à la différence des volumes des corps de révolution K_g obtenu en faisant tourner le graphe de g autour de Ox et K_f obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de Ox .

Comme dans le cours, nous saucissonnons l'intervalle $[a, b]$ par une subdivision régulière. On approche ensuite le volume de chaque tranche (de saucisson avec un trou au milieu) par le volume d'un cylindre troué de hauteur $\frac{b-a}{n}$. Pour les sommes de Darboux supérieures, le rayon extérieur est $M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc

$$V_i = \pi M_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi m_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Pour les sommes de Darboux inférieures, le rayon extérieur est $n_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $N_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc

$$v_i = \pi n_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi N_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Comme f et g sont intégrables, f^2 et g^2 sont aussi intégrables. Les volumes v_i et V_i sont donc les sommes de Darboux supérieures et inférieures qui convergent vers l'intégrale du volume qui est donc

$$V = \int_a^b (\pi g(x)^2 - \pi f(x)^2) dx$$

La différence des volumes de révolution est

$$\int_a^b \pi g(x)^2 dx - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Par linéarité de l'intégrale, ces deux quantités sont bien égales.

- (2) Calcule le volume du tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox le disque de rayon 1 centré en $(0; 2)$.

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 \left(2 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(4 + 4\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2\right) - \left(4 - 4\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2\right) dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 8\sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale étant la surface d'un quart de cercle de rayon 1 (voir cours),

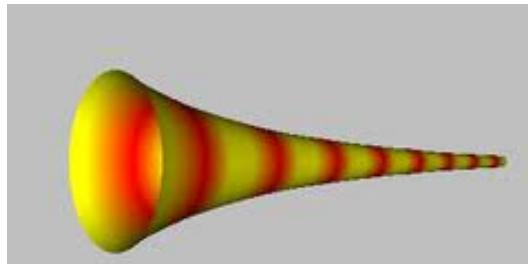
$$V = 16\pi \frac{\pi}{4} = 4\pi^2$$

- (3) Calcule le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox la surface comprise entre les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$V = \pi \int_0^1 (x^{2/3} - x^4) dx = \pi \left(\frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}$$

Exercice 8

Le paradoxe de la trompette de Gabriel. On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction $\frac{1}{x+1}$ autour de l'axe Ox pour $0 \leq x < \infty$:



- (1) On calcule le volume à l'aide de la formule (pour une intégrale généralisée) :

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi}{1+x} \Big|_0^\infty = \pi$$

Par contre le calcul de la surface fait intervenir la dérivée $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ et

$$S = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x+1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + (1+x)^{-4}}}{(x+1)^3} dx$$

Or la fonction $1 + (1 + x)^4$ est plus grande que $(1 + x)^4$ si bien que

$$S \geq 2\pi \int_0^\infty \frac{\sqrt{(1+x)^4}}{(x+1)^3} dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)} dx = 2\pi \log(1+x) \Big|_0^\infty = \infty$$

Le volume est fini, mais la surface est infinie !

- (2) Le paradoxe de la peinture de cet instrument est qu'on peut remplir la trompette de peinture, mais il en faudrait apparemment une quantité infinie pour en peindre sa surface ! Le paradoxe vient de notre interprétation de la façon de peindre une surface infinie. On imagine a priori que la couche de peinture est uniforme (disons 0,1 mm d'épaisseur). Dans ce cas il faudrait effectivement un *volume* de peinture infini pour peindre cette surface, mais elle ne pourrait servir à peindre l'intérieur de la trompette qui se resserre indéfiniment. Lorsqu'on verse $\pi \text{ m}^3$ de peinture dans la trompette, elle en couvre toute la surface, mais l'épaisseur de la couche tend vers zéro !

Exercice 9

Calculer l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = 2 - x^2$ définie sur $[-1, 1]$. Calculer ensuite son volume.

Avec le changement de variables $u = -2x$:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 - x^2) \sqrt{1 + (-2x)^2} dx \\ &= 2\pi \int_2^{-2} \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1 + u^2} \frac{1}{-2} du \\ &= \pi \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{1 + u^2} du - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 u^2 \sqrt{1 + u^2} du \end{aligned}$$

On donne les formules suivantes sans démonstration :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + u^2} du &= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C. \\ \int u^2 \sqrt{1 + u^2} du &= \frac{u}{4} \sqrt{(u^2 + 1)^3} - \frac{u}{8} \sqrt{u^2 + 1} - \frac{1}{8} \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C \end{aligned}$$

Par conséquent $A = 29.55$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^1 (2 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 4 - 4x^2 + x^4 dx = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \pi 2 \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) \simeq 18.0188
\end{aligned}$$

Exercice 10

On considère une tente igloo de base carrée, soutenue par deux arceaux reliant les sommets opposés de la base. La diagonale de la base carrée $ABCD$ vaut $2r$. Chacun des arceaux forme un arc de cercle centré en O , le milieu de la base de la tente. On considère que les arceaux se coupent au point S situé à l'aplomb de O et que la toile de la tente est parfaitement tendue.

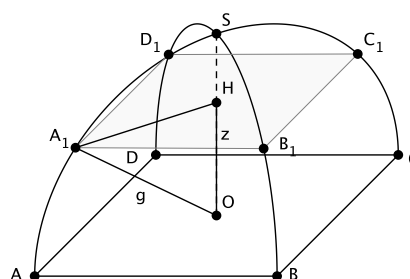
$$OD = OS = r.$$

L'intersection de la tente avec un plan parallèles au sol, forme un carré.

Si le plan se situe à une hauteur $z \in [0, r]$ mètres du sol, la demi diagonale du carré vaut $HA_1 = \sqrt{(OA_1)^2 - (OH)^2} = \sqrt{r^2 - z^2}$.

Ainsi, l'aire du carré vaut

$$2(HA_1)^2 = 2 \cdot (r^2 - z^2)$$



- (1) On approche le volume de la tente en la découpant en n tranches parallèles au sol et d'épaisseur r/n .

$$V_t \simeq \sum_{i=1}^n 2(r^2 - z_i^2) \frac{r}{n}$$

où $z_i = \frac{r}{n} i$ est la hauteur de la i^e tranche. Ceci n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann de la fonction $f(z) = 2 \cdot (r^2 - z^2)$ et en faisant tendre n vers l'infini il vient

$$V_t = \lim_{n \rightarrow \infty} = 2 \int_0^r r^2 - z^2 dz = 2 \left[zr^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3} r^3.$$

- (2) La pyramide de base $ABCD$ et de sommet S a pour volume $V_p = \frac{2}{3} r^3$.

Le volume de la demi sphère de rayon OS vaut $V_s = \frac{2}{3} \pi r^3$.

Ainsi, $V_t = 2V_p$ et $V_s = \frac{\pi}{2} V_t = \pi V_p$.