Corrigé 2

Volumes et surfaces de révolution

Exercice 1.

On pose $f(z) = 1 + z^2$. L'hyperboloïde peut être décrit comme

$$K = \{(x, y, z) \mid -1 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}.$$

Son volume vaut ainsi

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(z)^2\, dz = \pi \int_{-1}^{1} (1 + z^2)\, dz = \pi \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{3}$$

Exercice 2 (Différence de volumes.)**.**

(1) *Comme dans le cours, nous saucissonnons l'intervalle $[a, b]$ par une subdivision régulière. On approche ensuite le volume de chaque tranche (de saucisson avec un trou au milieu) par le volume d'un cylindre troué de hauteur $\frac{b-a}{n}$. Pour les sommes de Darboux supérieures, le rayon extérieur est $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc*

$$V_i = \pi M_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi m_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Pour les sommes de Darboux inférieures, le rayon extérieur est $n_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $N_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc

$$v_i = \pi n_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi N_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Comme f est g sont intégrables, f^2 et g^2 sont aussi intégrables. Les volumes v_i et V_i sont donc les sommes de Darboux supérieures et inférieures qui convergent vers l'inégrale du volume qui est donc

$$V = \int_a^b (\pi g(x)^2 - \pi f(x)^2) dx$$

La différence des volumes de révolution est

$$\int_a^b \pi g(x)^2 dx - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Par linéarité de l'intégrale, ces deux quantités sont bien égales.

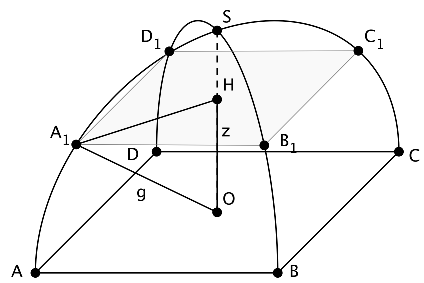
(2) *Le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox la surface comprise entre les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$ vaut*

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^{2/3} - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}$$

Exercice 3.

Sur le schéma ci-contre, on a $OD = OS = r$. L'intersection de la tente avec un plan parallèles au sol forme un carré. Si le plan se situe à une hauteur $z \in [0, r]$ mètres du sol, la demi diagonale du carré vaut

$$HA_1 = \sqrt{(OA_1)^2 - (OH)^2} = \sqrt{r^2 - z^2}.$$



Ainsi, l'aire du carré vaut

$$A_c = 2(HA_1)^2 = 2 \cdot (r^2 - z^2).$$

(1) *On approche le volume de la tente en la découpant en n tranches parallèles au sol et d'épaisseur r/n.*

$$V_t \simeq \sum_{i=1}^{n} 2\left(r^2 - z_i^2\right)\frac{r}{n}$$

où $z_i = \dfrac{r}{n}\, i$ est la hauteur de la i^e tranche. Ceci n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann de la fonction $f(z) = 2 \cdot (r^2 - z^2)$ et en faisant tendre n vers l'infini il vient

$$V_t = \lim_{n\to\infty} = 2\int_0^r r^2 - z^2\, dz = 2\left[zr^2 - \frac{z^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\, r^3.$$

(2) *La pyramide de base $ABCD$ et de sommet S a pour volume $V_p = \dfrac{2}{3}\, r^3$.*

Le volume de la demi sphère de rayon OS vaut $V_s = \dfrac{2}{3}\, \pi\, r^3$.

Ainsi, $\quad V_t = 2V_p \quad$ *et* $\quad V_s = \dfrac{\pi}{2}\, V_t = \pi\, V_p.$

Exercice 4 (Cône de révolution).

(1) *Le développement du cône est un secteur de rayon* $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ *et d'angle au centre* $\alpha = \dfrac{2\pi r}{g}$. *Ainsi,* $S = \cancel{\pi} g^2 \dfrac{\alpha}{2\cancel{\pi}} = g^{\cancel{2}} \dfrac{2\pi r}{2\cancel{g}} = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

(2) *Un cône tronqué tel que décrit dans la donnée correspond à un cône de rayon* R *et de hauteur* H*, au sommet duquel on a retiré un cône de rayon* r *et de hauteur* $H - h$*. Par le théorème de Thalès, on a que*

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$$

et donc

$$H = \frac{hR}{R-r}.$$

Par le point précédent, le volume du cône complet vaut ainsi

$$V_R = \pi R \sqrt{R^2 + \left(\frac{hR}{R-r}\right)^2}$$

et le volume du cône qu'on a retiré vaut

$$V_r = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{hr}{R-r}\right)^2}.$$

Finalement, on trouve que le volume du cône tronqué vaut

$$\begin{aligned} V &= V_R - V_r \\ &= \pi R \sqrt{\frac{(R-r)^2 R^2 + (hR)^2}{(R-r)^2}} - \pi r \sqrt{\frac{(R-r)^2 r^2 + (hr)^2}{(R-r)^2}} \\ &= \pi (R+r) \sqrt{(R-r)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Exercice 5.
On commence par calculer l'aire A du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = 2 - x^2$ définie sur $[-1, 1]$. Pour ceci, on utilise le changement de variables $u = -2x$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x^2)\sqrt{1 + (-2x)^2}\ dx \\
&= 2\pi \int_{2}^{-2} \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1 + u^2} \frac{1}{-2}\ du \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1 + u^2}\ du \\
&= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + u^2} du - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} u^2 \sqrt{1 + u^2}\ du.
\end{aligned}$$

En utilisant les deux formules suivantes

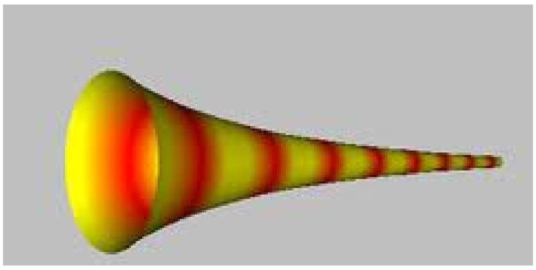
$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + u^2}\ du &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) + C. \\
\int u^2 \sqrt{1 + u^2}\ du &= \frac{u}{4}\sqrt{(u^2 + 1)^3} - \frac{u}{8}\sqrt{u^2 + 1} - \frac{1}{8} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) + C
\end{aligned}$$

on obtient finalement $A = 29.55$.

Intéressons nous ensuite au volume de ce tonneau. On a :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} (2 - x^2)^2\ dx = \pi \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 + x^4\ dx = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \pi 2 \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) \simeq 18.0188
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Le paradoxe de la trompette de Gabriel)**.** *On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction $\dfrac{1}{x+1}$ autour de l'axe Ox pour $0 \leq x < \infty$:*



On calcule le volume à l'aide de la formule (pour une intégrale généralisée) :

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi}{1+x}\bigg|_0^\infty = \pi$$

Par contre le calcul de la surface fait intervenir la dérivée $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ *et*

$$S = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x+1}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+(1+x)^4}}{(x+1)^3} dx$$

Or la fonction $1 + (1+x)^4$ *est plus grande que* $(1+x)^4$ *si bien que*

$$S \geq 2\pi \int_0^\infty \frac{\sqrt{(1+x)^4}}{(x+1)^3} dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)} dx = 2\pi \log(1+x)\bigg|_0^\infty = \infty$$

Le volume est fini, mais la surface est infinie !

Remarque : *Le paradoxe de la peinture de cet instrument est qu'on peut peindre son intérieur en remplissant la trompette de peinture (puisque son volume est fini), mais qu'il en faudrait apparemment une quantité infinie pour en peindre sa surface !*
Le paradoxe vient de notre interprétation de la façon de peindre une surface infinie. On imagine a priori que la couche de peinture est uniforme (disons $0,1$ *mm d'épaisseure). Dans ce cas il faudrait effectivement un* volume *de peinture infini pour peindre cette surface, mais elle ne pourrait servir à peindre l'intérieur de la trompette qui se resserre indéfiniment. Lorsqu'on verse* $\pi[m^3]$ *de peinture dans la trompette, elle en couvre toute la surface, mais l'épaisseur de la couche tend vers zéro !*

Exercice 7 (Vrai ou faux ?)**.**

(1) FAUX. L'aire du cylindre est $2r2\pi r = 4\pi r^2$*, tandis que l'aire de la sphère est aussi* $4\pi r^2$.

(2) FAUX. Contre-exemple : $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = 1/3$ *sur l'intervalle* $[0,1]$*. Les deux aires sont égales à* $1/3$*, mais*

$$\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \frac{\pi}{5} \neq \pi \int_0^1 g(x)^2 dx = \frac{\pi}{9}$$

(3) FAUX. Contre-exemple $f(x) = -1$ *sur* $[0,1]$.

Applications à la physique

Exercice 8 (Un peu de science-fiction...).

L'accélération à une distance x du centre de la Terre est dirigée vers le centre de la Terre et vaut

$$a(x) = \frac{9.81x}{6.371 \cdot 10^6}[m/s^2].$$

Pour déplacer une masse d'un kilo du centre à la surface de la Terre, la travail à effectuer est donc :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{6.371 \cdot 10^6} ma(x)\ dx \\ &= \int_0^{6.371 \cdot 10^6} 1 \cdot \frac{9.81x}{6.371 \cdot 10^6}\ dx \\ &= \frac{9.81}{6.371 \cdot 10^6} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{6.371 \cdot 10^6} \\ &\approx 3.125 \cdot 10^7 Joules. \end{aligned}$$

Exercice 9.

(1) *Le débit instantané total au temps t est donné par*

$$f(t) = d(t) - v(t) = 2t - t^2,$$

qui est une fonction continue et bornée sur [0,1].
En découpant l'intervalle [0,1] en n intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ tel que $t_i = \frac{i}{n}$, avec $i = 1, 2, \ldots, n$, on calcule que le volume d'eau contenu dans le récipient après 1 minute vaut :
$V_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{1}{n} = \int_0^1 2t - t^2 dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, *soit 0.667 litre environ.*

(2) $V'(t) = 2t - t^2 = t\ (2-t)$ *s'annule en* $t = 0$ *et* $t = 2$. V' *est positif sur [0 ; 2], négatif sinon.*
Donc, $V(t)$ *est minimal en* $t = 0$ *et maximal en* $t = 2$.

(3) $V(t) = \int_0^t 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^t = t^2 - \frac{t^3}{3} = t^2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$ *s'annule en* $t = 0$ *et* $t = 3$.

Le récipient est à nouveau vide après 3 minutes. Pour $t > 3$, *le débit entrant est inférieur au débit sortant. Ces données n'ont donc plus de sens.*

(4) Le graphe de la fonction V exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps t – mesuré en minute – pour t compris entre $t = 0$ et $t = 3$ (l'instant où le récipient est à nouveau vide) est le suivant :