7

Système de points matériels

« More is different. »
— Philip Anderson

I. Forces intérieures et forces extérieures

Considérons un ensemble de points matériels de masses m_i et repérés par leur position M_i. Le principe fondamental appliqué au point matériel i s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}\,,$$

où $\vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$ est la somme des forces extérieures appliquées à i et $\vec{F}_{j\to i}$ la force exercée par le point j sur le point i.

Définition (Quantité de mouvement totale). La quantité de mouvement totale $\vec{P}$ par

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i\,.$$

Avec ça, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}\,.$$

Or, la somme $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$ peut se réécrire comme

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} = \sum_{(i,j)} \left(\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i}\right)\,,$$

où $\sum_{(i,j)}$ signifie qu'on somme sur toutes les paires de particules. Or, d'après la troisième loi de Newton,

$$\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}\,.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème (Théorème de la quantité de mouvement totale).

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}}$$

avec $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$.

De même, pour un point matériel, nous savons que le moment cinétique $\vec{L}_{O,i}$ satisfait

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{O,i}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i \quad \text{avec} \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}\,.$$

Si l'on définit le moment cinétique total $\vec{L}_O$ par

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O,i}\,,$$

il vérifie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \to i}\,.$$

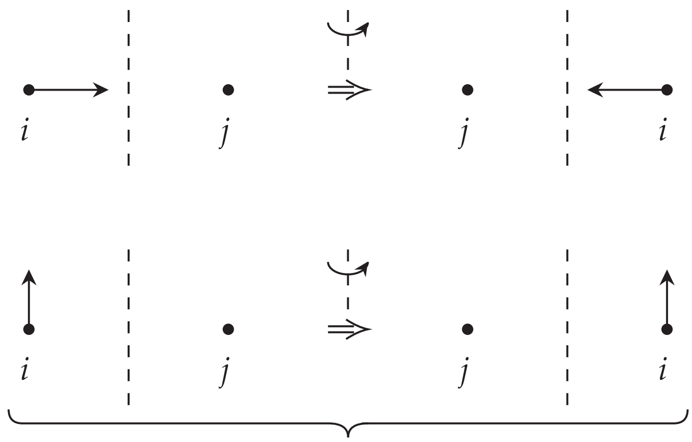
Mais encore une fois, on peut écrire

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \to i} = \sum_{(i,j)} \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \to i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \to j} \right)\,,$$

et, comme $\vec{F}_{i \to j} = -\vec{F}_{j \to i}$, on peut écrire

$$\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \to i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \to j} = \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_j} \right) \wedge \vec{F}_{j \to i} = \overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{j \to i}\,.$$

On fait par ailleurs l'hypothèse que les forces $\vec{F}_{i \to j}$ et $\vec{F}_{j \to i}$ sont parallèles au vecteur $\overrightarrow{M_i M_j}$, ce qu'on peut rendre plausible par des arguments de symétrie si la 3ème loi de Newton est satisfaite.



$\vec{F}_{\mathrm{d} \to \mathrm{g}} = -\vec{F}_{\mathrm{g} \to \mathrm{d}}$

d : droite
g : gauche

$\vec{F}_{\mathrm{d} \to \mathrm{g}} = \vec{F}_{\mathrm{g} \to \mathrm{d}}$

ne satisfait pas la troisième loi

Ainsi, $\overrightarrow{M_j M_i} \wedge \vec{F}_{j \to j} = \vec{0}$ donc

$$\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{j \to i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{F}_{i \to j} = \vec{0}\,,$$

et donc finalement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,i}^{\text{ext}}$$

d'où le théorème :

Théorème (Théorème du moment cinétique total).

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,i}^{\text{ext}}$ est le moment des forces extérieures qui s'exercent sur i et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}}$ la somme des moments extérieurs.

Remarque. Ce théorème n'est valable que si le point O est un point fixe dans le référentiel considéré. En effet, lorsque nous avons établi le théorème du moment cinétique pour un point matériel, nous avons utilisé le fait que la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ était égale à $\vec{v}_M$, donc que le point O était fixe. Si l'on définit le moment cinétique par rapport à un point mobile, il y a un terme complémentaire. Ce point sera discuté en détail dans le chapitre suivant dédié aux solides indéformables.

II. Statique

Une première application de ces lois concerne les conditions d'équilibre d'un système de points matériels. En effet, si un système ne bouge pas (il est statique), on a

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t) = \overrightarrow{cte} \\ \vec{v}_i(t) = \vec{0} \end{cases},$$

d'où

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{0}\,.$$

Cela implique que

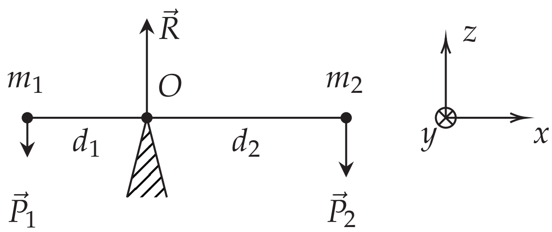
$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}\,,$$

et donc que

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \vec{0}\,.$$

Si un système est à l'équilibre, la somme des forces extérieures et la somme des moments des forces extérieures sont nulles.

Exemple. Considérons deux masses m_1 et m_2 chacune à une extrémité d'une poutre de masse négligeable elle même sur un point d'appui. On note d_1 et d_2 les distances au point d'appui. Que valent d_1 et d_2 à l'équilibre ?



À l'équilibre, on a d'abord

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{0}\,,$$

mais l'on a aussi

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad ?$$

On peut choisir O où l'on veut, mais le plus simple est de choisir O là où s'applique $\vec{R}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \underbrace{\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2\,.$$

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 &= -d_1\,\vec{e}_x \wedge (-m_1 g)\,\vec{e}_z = -m_1 d_1 g\,\vec{e}_y \\ \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 &= d_2\,\vec{e}_x \wedge (-m_2 g)\,\vec{e}_z = m_2 d_2 g\,\vec{e}_y\,, \end{aligned}$$

donc

$$-m_1 d_1 g + m_2 d_2 g = 0$$

et finalement

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}.}$$

Si $m_1 > m_2$ alors $d1 < d_2$: c'est logique.

Remarque. Si on avait choisi un point A n'importe où entre m_1 et m_2, on arriverait au même résultat. En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} &= \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{P}_2 \\
&= \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}_2 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 \\
&= \overrightarrow{AO} \wedge \underbrace{\left(\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{P}_2\right)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 \\
&= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}},
\end{aligned}$$

finalement la même condition.

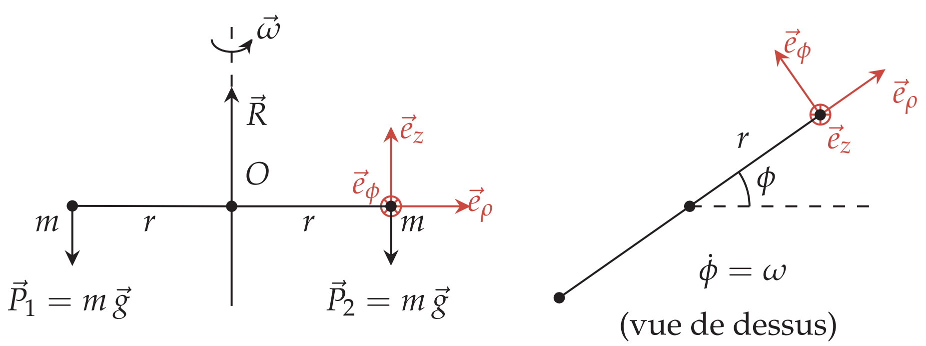
III. Systèmes isolés

Un système est dit isolé si les sommes des forces extérieures et de leurs moments sont nulles. Dans ce cas,

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{cte} \\
\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{cte}
\end{cases}.$$

Par contre, l'énergie n'est pas conservée parce qu'il peut y avoir des forces internes qui travaillent.

Exemple (Tabouret tournant)**.** Considérons l'exemple du tabouret tournant.



Le mouvement se fait dans un plan horizontal :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{0}.$$

Le moment par rapport à O est

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 = \underbrace{\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right)}_{=\vec{0}} \wedge m\,\vec{g} = \vec{0},$$

donc le moment cinétique par rapport à O est conservé. Mais

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \overrightarrow{OM_1} \wedge m\,\vec{v}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge m\,\vec{v}_2 \\ &= r\,\vec{e}_\rho \wedge \left(mr\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\right) + \left(-r\,\vec{e}_\rho\right) \wedge \left(-mr\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\right) \\ &= 2mr^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z\end{aligned}$$

soit, avec $\dot{\phi} = \omega$,

$$\vec{L}_O = 2mr^2\omega\,\vec{e}_z\,.$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$, on en déduit

$$r^2\omega = \text{cte}.$$

Ainsi, si l'on diminue le rayon, ω augmente :

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,.}$$

C'est grâce à cet effet que les patineurs font des pirouettes à très grandes vitesses de rotation.

Remarque. La quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés si on passe de r_1 à r_2, mais pas l'énergie cinétique. En effet,

$$\vec{P} = m\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}\,.$$

Par contre, l'énergie cinétique est donnée par

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = mv^2 = mr^2\omega^2$$

donc

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{mr_2^2\omega_2^2}{mr_1^2\omega_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{r_1^2}{r_2^2}\,.$$

Pour rapprocher les masses, il faut leur appliquer des forces qui travaillent.

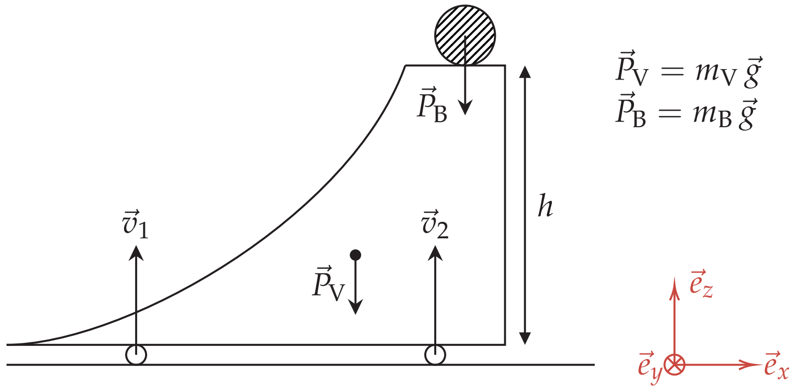
Définition (Système partiellement isolé)**.** Un système est dit **partiellement isolé** selon une direction $\vec{u}$ si

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{u} = 0\,.$$

Dans ce cas, seules les composantes suivant $\vec{u}$ sont conservées :

$$\vec{P} \cdot \vec{u} = \text{cte} \quad \text{et} \quad \vec{L}_O \cdot \vec{u} = \text{cte}.$$

Exemple (Voiture à boulet)**.** Si le boulet roule le long de la pente, que se passe-t-il ?



Les forces extérieures sont toutes verticales. Ainsi,

$$\vec{F}^\mathrm{ext} \cdot \vec{e}_x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,x} + m_\mathrm{V} v_{\mathrm{V}\,x} = \text{cte}.$$

Si au départ les deux sont au repos, on a donc

$$m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,x} + m_\mathrm{V} v_{\mathrm{V}\,x} = 0$$

ou encore

$$v_{\mathrm{V}\,x} = -v_{\mathrm{B}\,x}\,\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{V}}\,.$$

Si l'on néglige les frottements, il n'y a pas de forces non conservatives qui travaillent, et l'énergie mécanique doit être conservée :

$$E = K_\mathrm{B} + K_\mathrm{V} + V_\mathrm{B} + V_\mathrm{V} = \frac{1}{2} m_\mathrm{B} v_\mathrm{B}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{V} v_\mathrm{V}^2 + m_\mathrm{B} g z + 0 = \text{cte}.$$

Au départ, $E = m_\mathrm{B} g h$ et à l'arrivée $E = \frac{1}{2} m_\mathrm{B} v_{\mathrm{B}\,x}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{V} v_{\mathrm{V}\,x}^2$ ($v_\mathrm{B} = |v_{\mathrm{B}\,x}|$ car le rail est horizontal en sortie), donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m_\mathrm{V} v_{\mathrm{V}\,x}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{B} v_{\mathrm{V}\,x}^2 \frac{m_\mathrm{V}^2}{m_\mathrm{B}^2} &= m_\mathrm{B} g h \\
\frac{1}{2} m_\mathrm{V} v_{\mathrm{V}\,x}^2 \left(1 + \frac{m_\mathrm{V}}{m_\mathrm{B}}\right) &= m_\mathrm{B} g h \\
v_{\mathrm{V}\,x}^2 &= 2gh\,\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{V}\left(1 + \dfrac{m_\mathrm{V}}{m_\mathrm{B}}\right)}\,,
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{v_\mathrm{V}^2 = 2gh\,\frac{1}{x\,(1+x)}}$$

avec $x = \dfrac{m_\mathrm{V}}{m_\mathrm{B}}$. Il y a trois cas limites :

— si $m_\mathrm{V} \gg m_\mathrm{B}$, alors $v_\mathrm{V} \longrightarrow 0$;

— si $m_\mathrm{B} \gg m_\mathrm{V}$, alors $v_\mathrm{V} \longrightarrow +\infty$;

— si $m_\mathrm{V} = m_\mathrm{B}$, alors $v_\mathrm{V} = v_\mathrm{B} = \sqrt{gh}$.

IV. Centre de masse

Définition (Centre de masse)**.** Le centre de masse (aussi appelé centre de gravité ou centre d'inertie) est le barycentre des points M_i affectés des masses m_i. On le note G, et il vérifie

$$\left(\sum_i m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\,,$$

que l'on écrit souvent

$$\boxed{M\,\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}$$

avec $M = \sum_i m_i$.

Proposition. La définition de G est indépendante du point O.

Démonstration. On a simplement

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \overrightarrow{O'M_i} &= \sum_i m_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}\right)\\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{O'O} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\\ &= M\,\overrightarrow{O'O} + M\,\overrightarrow{OG} = M\,\overrightarrow{O'G}\,.\end{aligned}$$

Définition alternative (Centre de masse)**.**

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

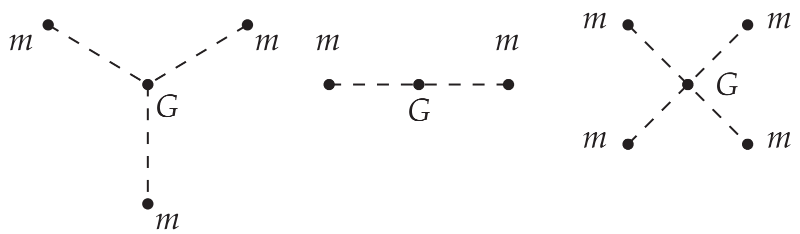
Démonstration. En appliquant la définition

$$M\,\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

à $O = G$, on passe de la première définition à la deuxième.
Et pour passer de la deuxième à la première, il suffit de remplacer $\overrightarrow{GM_i}$ par $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}$ dans $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

Cette définition a l'avantage de ne pas faire intervenir un point O annexe, et elle permet de deviner où se situe G dans des cas simples.

Exemples. On a les trois cas simples suivants.



Proposition. La quantité de mouvement totale vérifie

$$M\,\vec{v}_G = \vec{P}\,.$$

Démonstration. On a

$$M\,\vec{v}_G = M\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\,\overrightarrow{OG}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right) = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}\,.$$

Théorème (Théorème du centre de masse)**.** Soient $\vec{a}_G$ l'accélération du centre de masse et $\vec{F}^{\text{ext}}$ la somme des forces extérieures, on a alors

$$\boxed{M\,\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}\,.}$$

Preuve. On a simplement

$$M\,\vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\,\vec{v}_G) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{P} = \vec{F}^{\text{ext}}\,.$$

En d'autres termes, le centre de masse d'un système de points matériels se comporte comme un point matériel de masse $M = \sum_i m_i$ subissant toutes les forces extérieures qui s'appliquent au système. C'est cette propriété qui justifie de traiter de nombreux problèmes faisant intervenir des objets de taille non négligeable comme des points matériels.

1. Référentiel du centre de masse

Le référentiel du centre de masse, noté $\mathcal{R}^*$, est le référentiel qui, à l'instant t, est en translation par rapport au référentiel du laboratoire à la vitesse $\vec{v}_G$.

L'intérêt de ce référentiel est que de nombreuses lois prennent une forme plus simple dans ce référentiel.

Proposition. Dans le référentiel du centre de masse, les vitesses $\vec{v}_i^*$ satisfont

$$\sum_i m_i\,\vec{v}_i^* = \vec{0}\,.$$

Preuve. D'après les formules de changement de référentiel,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_i &= \vec{v}_G + \vec{v}_i^* \\
\sum_i m_i\,\vec{v}_i &= \sum_i m_i\,\vec{v}_G + \sum_i m_i\,\vec{v}_i^* \\
\underbrace{\sum_i m_i\,\vec{v}_i}_{=\vec{P}} &= \underbrace{M\,\vec{v}_G}_{=\vec{P}} + \sum_i m_i\,\vec{v}_i^*\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_i m_i\,\vec{v}_i^* = \vec{0}\,.}$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle.

V. Problème à deux corps

On s'intéresse à deux points matériels de masse m_1 et m_2 n'étant soumis qu'aux forces internes $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$. Comme $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$, le centre de masse G satisfait

$$M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{0}\,.$$

Il est donc en translation uniforme par rapport au référentiel du laboratoire.

Définitions (Positions du centre de masse et relative)**.** Plutôt que d'utiliser $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ pour décrire le mouvement, cela suggère de faire un changement de variables, et de remplacer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par

$$\begin{cases} \vec{R} &= \text{position du centre de masse,} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{position relative.} \end{cases}$$

Par définition du centre de masse, on a bien sûr

$$M\,\vec{R} = m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Les équations du mouvement pour $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont données par

$$m_1\,\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2\to 1} \quad \text{et} \quad m_2\,\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1\to 2}\,.$$

On en déduit aisément les équations du mouvement pour $\vec{R}$ et $\vec{r}$. Pour $\vec{R}$, on a simplement

$$M\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{1\to 2} = \vec{0}\,.$$

On retrouve le fait que $\vec{a}_G = \vec{0}$. Pour $\vec{r}$, on a

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_{2\to 1} - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_{1\to 2} \\ \ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{2\to 1} \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{2\to 1} \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{2\to 1}\,. \end{aligned}$$

Définition (Masse réduite)**.** La quantité $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a la dimension d'une masse. On l'appelle **masse réduite**.

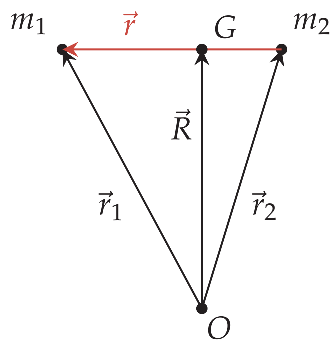
La position relative est donc régie par l'équation

$$\boxed{\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2\to 1}\,,}$$

avec $\vec{F}_{2\to 1} \mathbin{/\!/} \vec{r}$: c'est un mouvement à **force centrale**.

Exemple (Gravitation)**.** Dans le cas de la gravitation, la position relative $\vec{r}$ se retrouve directement dans la force :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{C}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,.$$



Avec O une origine arbitraire, $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$ et $M = m_1 + m_2$.

Remarque. Le mouvement se ramène à celui de deux particules effectives indépendantes :

— une de masse $M = m_1 + m_2$, le centre de masse ;

— une de masse μ qui vérifie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.

La solution en termes des inconnues initiales $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ s'obtient en inversant les relations donnant $\vec{R}$ et $\vec{r}$:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\end{cases} \implies \begin{cases}(m_1+m_2)\vec{R} + m_2\vec{r} &= (m_1+m_2)\vec{r}_1 \\ (m_1+m_2)\vec{R} - m_1\vec{r} &= (m_1+m_2)\vec{r}_2\end{cases},$$

soit finalement

$$\begin{cases}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\end{cases}.$$

Exemple (Mouvement des planètes autour du Soleil)**.** Dans le calcul fait précédemment, nous avons supposé que le Soleil était immobile, et nous avons décrit le mouvement d'une planète comme celui d'un point matériel de masse m_P. Une description plus correcte doit inclure le mouvement du Soleil, et doit prendre en compte le fait qu'il est influencé par la planète.

La masse réduite est donnée par

$$\mu = \frac{m_\mathrm{P} m_\mathrm{S}}{m_\mathrm{P} + m_\mathrm{S}} = \frac{m_\mathrm{P}}{1 + \dfrac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{S}}} \simeq m_\mathrm{P} \quad \text{si} \quad m_\mathrm{P} \ll m_\mathrm{S}\,.$$

L'erreur commise est d'ordre $\dfrac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{S}}$, donc très petite puisque $m_\mathrm{P} \ll m_\mathrm{S}$.

Dans la solution générale du problème à deux corps, si on décrit le Soleil par $(m_2, \vec{r}_2)$ et la planète par $(m_1, \vec{r}_1)$, on obtient

$$\begin{cases}\vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \simeq \vec{R} + \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \simeq \vec{R}\end{cases}.$$

$\vec{R}$ décrit à peu près la position du Soleil, et $\vec{r}$ la position par rapport au Soleil.

VI. Collisions

Si la force d'interaction est parfaitement connue, comme dans le cas de la gravitation, on peut calculer exactement les trajectoires. Si, lorsque les deux objets sont très loin l'un de l'autre, leur trajectoire relative est simplement donnée par des droites, cela veut dire que la trajectoire relative est une hyperbole ($e > 1$). On peut en déduire exactement les positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

Mais dans beaucoup de circonstances, la nature des interactions n'est pas connue en détail. Est-ce qu'on doit en déduire qu'on ne peut rien dire sur les vitesses après que les objets sont passés à proximité l'un de l'autre, voire ont été en contact ? Non. Les lois de conservation permettent d'obtenir des renseignements intéressants.

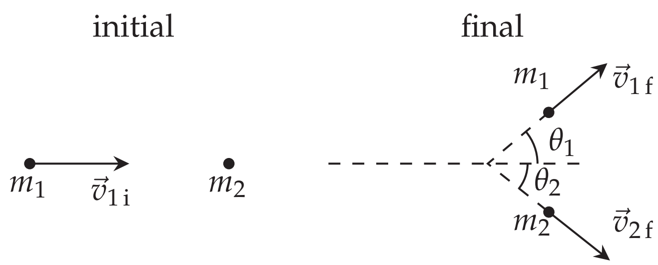
La conservation de la quantité de mouvement nous donne :

$$m_1 \vec{v}_{1\mathrm{i}} + m_2 \vec{v}_{2\mathrm{i}} = m_1 \vec{v}_{1\mathrm{f}} + m_2 \vec{v}_{2\mathrm{f}} \,.$$

On peut se placer dans le référentiel où le point matériel 2 est au repos, ou, de façon équivalente, supposer que $\vec{v}_{2\mathrm{i}} = \vec{0}$:

$$\boxed{m_1 \vec{v}_{1\mathrm{i}} = m_1 \vec{v}_{1\mathrm{f}} + m_2 \vec{v}_{2,\mathrm{f}} \,.} \tag{1}$$

Cette équation implique que ces trois vitesses sont coplanaires.



1. Choc élastique

Définition (Choc élastique)**.** On dit qu'un choc est élastique si, en plus de la quantité de mouvement, l'énergie cinétique est conservée :

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{f}}^2 \,.} \tag{2}$$

En prenant en compte le fait que le mouvement est plan, on a au total trois équations pour quatre inconnues : $v_{1\mathrm{f}}$, $v_{2\mathrm{f}}$, θ_1 et θ_2. Donc on ne peut pas résoudre complètement le problème sans informations supplémentaires, mais on peut quand même obtenir des résultats généraux intéressants. L'équation (1) donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1 v_{1\mathrm{i}} & = & m_1 v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2\mathrm{f}} \cos\theta_2 \\ 0 & = & m_1 v_{1\mathrm{f}} \sin\theta_1 - m_2 v_{2\mathrm{f}} \sin\theta_2 \end{array} \right.$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m_1 v_{1\mathrm{i}} - m_1 v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 & = & m_2 v_{2\mathrm{f}} \cos\theta_2 \\ m_1 v_{1\mathrm{f}} \sin\theta_1 & = & m_2 v_{2\mathrm{f}} \sin\theta_2 \end{array} \right. ,$$

et, en prenant la somme des carrés des deux membres, on a

$$v_{1\mathrm{i}}^2 + v_{1\mathrm{f}}^2 - 2 v_{1\mathrm{i}} v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2\mathrm{f}}^2 \,.$$

L'équation (2) peut se réécrire

$$v_{2\mathrm{f}}^2 \frac{m_2}{m_1} = v_{1\mathrm{i}}^2 - v_{1\mathrm{f}}^2 \,,$$

d'où

$$\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)v_{1i}^2+\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)v_{1f}^2-2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1=0$$

soit, en posant $x=\dfrac{v_{1f}}{v_{1i}}$,

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)x^2-2x\cos\theta_1+\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)=0\,.$$

C'est une équation du second degré en x dont le discriminant est

$$\Delta=4\left(\cos^2\theta_1-1+\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\,.$$

On distingue d'abord deux cas généraux, puis deux cas particuliers.

— Si $m_2>m_1$, alors Δ est toujours positif. La solution positive est donnée par

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\cos\theta_1+\sqrt{\cos^2\theta_1-1+\frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)\,.$$

— Si $m_2<m_1$, alors $\Delta>0$ si $\cos^2\theta_1>1-\dfrac{m_2^2}{m_1^2}$, et la solution est positive si $\cos\theta_1>0$:

$$\boxed{\theta_1<\theta_{1\,\text{max}}<\frac{\pi}{2}\quad\text{avec}\quad\sin\theta_{1\,\text{max}}=\frac{m_2}{m_1}\,.}$$

Cas particuliers.

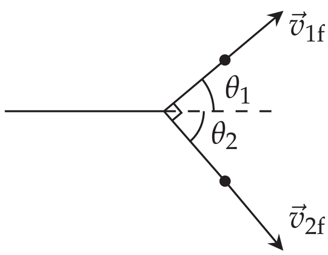
1. Si $m_1=m_2$, alors on a

$$\begin{cases}\vec{v}_{1i}=\vec{v}_{1f}+\vec{v}_{2f}\Longrightarrow v_{1i}^2=v_{1f}^2+v_{2f}^2+2\,\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f}\\ \vec{v}_{1i}^2=v_{1f}^2+v_{2f}^2\end{cases},$$

donc

$$\boxed{\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f}=0\,.}$$

— $\vec{v}_{1f}=\vec{0}$: échange des vitesses ;
— $\vec{v}_{2f}=\vec{0}$: pas de choc ;
— $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$.



2. **Collision unidimensionnelle** :

$$\begin{cases}v_{1i\,x}=v_{1f\,x}+\dfrac{m_2}{m_1}v_{2f\,x}\\ v_{1i\,x}^2=v_{1f\,x}^2+\dfrac{m_2}{m_1}v_{2f\,x}^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}v_{1i\,x}-v_{1f\,x}=\dfrac{m_2}{m_1}v_{2f\,x}\\ v_{1i\,x}^2-v_{1f\,x}^2=\dfrac{m_2}{m_1}v_{2f\,x}^2\end{cases}.$$

Première solution : $v_{1i\,x}=v_{1f\,x}$ et $v_{2f\,x}=0$. Il n'y a pas eu de choc.

Deuxième solution :

$$v_{1\mathrm{i}\,x}^2 - v_{1\mathrm{f}\,x}^2 = (v_{1\mathrm{i}\,x} + v_{1\mathrm{f}\,x})(v_{1\mathrm{i}\,x} - v_{1\mathrm{f}\,x}) = \frac{m_2}{m_1} v_{2\mathrm{f}\,x}^2$$
$$\implies \qquad v_{1\mathrm{i}\,x} + v_{1\mathrm{f}\,x} = \frac{m_2}{m_1} v_{2\mathrm{f}\,x}^2 \frac{m_1}{m_2 v_{2\mathrm{f}\,x}} = v_{2\mathrm{f}\,x}\,.$$

Ainsi,

$$2v_{1\mathrm{i}\,x} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2\mathrm{f}\,x}\,,$$

et

$$2v_{1\mathrm{f}\,x} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2\mathrm{f}\,x} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}\,x}\,,$$

donc finalement

$$\boxed{v_{2\mathrm{f}\,x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}\,x} \quad \text{et} \quad v_{1\mathrm{f}\,x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}\,x}\,.}$$

Il y a trois cas limites.

— Si $m_1 = m_2$, alors $v_{1\mathrm{f}\,x} = 0$ et $v_{2\mathrm{f}\,x} = v_{1\mathrm{i}\,x}$. C'est un simple échange des vitesses.

— Si $m_1 \ll m_2$, alors $v_{1\mathrm{f}\,x} = -v_{1\mathrm{i}\,x}$ et $v_{2\mathrm{f}\,x} = 0$. C'est un rebond sur une masse infinie.

— Si $m_1 \gg m_2$, alors $v_{1\mathrm{f}\,x} = v_{1\mathrm{i}\,x}$ et $v_{2\mathrm{f}\,x} = 2v_{1\mathrm{i}\,x}$: la particule incidente continue à la même vitesse, la particule légère continue à deux fois la vitesse. C'est logique, dans le référentiel de la particule m_1, la particule m_2 rebondit :

$$\begin{cases} \text{vitesse initiale : } v'_{2\mathrm{i}\,x} = -v_{1\mathrm{i}\,x}\,, \\ \text{vitesse finale : } v'_{2\mathrm{f}\,x} = v_{1\mathrm{i}\,x}\,. \end{cases}$$

2. Choc inélastique

Définition (Choc inélastique)**.** Lorsque l'énergie cinétique n'est pas conservée, on parle de choc inélastique. De l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

En particulier, on parle de choc mou lorsque les deux points matériels restent accrochés après le choc : $\vec{v}_{1\mathrm{f}} = \vec{v}_{2\mathrm{f}} = \vec{V}$. La conservation de la quantité de mouvement implique

$$m_1\,\vec{v}_{1\mathrm{i}} = (m_1 + m_2)\,\vec{V} \qquad \implies \qquad \boxed{\vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_{1\mathrm{i}}\,.}$$

Remarque. $\vec{V}$ est la vitesse du centre de masse, puisque la quantité de mouvement totale est donnée par $(m_1 + m_2)\,\vec{V}$.

Au cours d'un tel choc, l'énergie cinétique diminue. En effet, on a

$$\begin{aligned}
K_\mathrm{i} - K_\mathrm{f} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,V^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1\mathrm{i}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) v_{1\mathrm{i}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}}^2 > 0\,.
\end{aligned}$$

Cette énergie s'est transformée en chaleur lors du choc.

Complément. VII. Système de masse variable

Un problème apparenté est celui où un système expulse de la masse. Le cas typique est celui d'une fusée qui expulse du gaz à une vitesse $\vec{u} = -u\,\vec{e}_z$. La quantité de mouvement à un instant t est donnée par

$$\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t)\,,$$

et un petit instant δt plus tard, elle devient

$$\vec{p}(t+\delta t) = (m+\delta m)\,(\vec{v}+\delta\vec{v}) - \delta m\,(\vec{v}+\vec{u})\ ,$$

où

- $m + \delta m$ est la masse de la fusée à l'instant $t + \delta t$ ($\delta m < 0$) ;
- $\vec{v} + \delta\vec{v}$ est la vitesse de la fusée à l'instant $t + \delta t$;
- $-\delta m$ correspond à la masse de gaz éjectée ;
- $\vec{v} + \vec{u}$ est la vitesse du gaz éjecté.

La différence de ces deux quantités de mouvement est

$$\begin{aligned}\vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t) &\simeq \delta m\,\vec{v} + m\,\delta v - \delta m\,\vec{v} - \delta m\,\vec{u}\\ &= m\,\delta\vec{v} - \vec{u}\,\delta m\,,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t)}{\delta t} = m\,\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} - \vec{u}\,\frac{\delta m}{\delta t}\,,$$

qui correspond, pour δt très petit, à

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}\,.$$

Or, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{\text{ext}} = m\,\vec{g}$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{g} + \dot{m}\,\vec{u}\,.$$

Si l'on projette suivant z vertical ascendant, il vient

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - \dot{m}u$$

car $\vec{g}$ et $\vec{u}$ sont orientés vers le bas. La condition de décollage $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$ impose

$$\begin{aligned}-mg - \dot{m}u &> 0\\ -\dot{m}u &> mg\\ |\dot{m}|u &> \underbrace{mg}_{\text{poids}}\,.\end{aligned}$$

L'équation peut se réécrire

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{\dot{m}}{m}\,u\,,$$

d'où, si $v(0) = 0$,

$$\boxed{v(t) = \ln\frac{m(0)}{m(t)}\,u - gt\,,}$$

où l'on a supposé que la vitesse d'éjection u est constante.