6

Changement de référentiel, dynamique terrestre

« *E pur si moeve.* »
— Galileo Galilei

I. Référentiels et repères

Comme défini au premier chapitre, un **référentiel** est défini par la donnée de quatre points non coplanaires dont les distances mutuelles restent constantes, et par extension de tous les points dont les distances mutuelles à ces quatre points restent constantes. Des exemples de référentiel souvent utilisés sont les suivants.

Exemples.
- Un solide.
- Le référentiel terrestre (ou du laboratoire).
- Le référentiel géocentrique ou de Ptolémée, défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes.
- Le référentiel héliocentrique ou de Kepler, défini par le centre du Soleil et trois étoiles fixes.

On définit aussi la notion de **repère**.

Définition. Un repère est défini par la donnée d'un point de l'espace et de trois vecteurs non coplanaires. En général, on utilise des **repères orthonormés directs** (vecteurs orthogonaux de norme 1, troisième vecteur égal au produit vectoriel des deux premiers).

Un repère est dit **lié** au référentiel $\mathcal{R}$ si son origine et ses vecteurs ne bougent pas par rapport à $\mathcal{R}$. À un repère, on ne peut associer qu'un seul référentiel auquel il est lié. Par contre, on peut définir une infinité de repères liés à un référentiel en changeant l'origine et l'orientation des vecteurs.

II. Changement de référentiel

Considérons deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Soient $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère lié à $\mathcal{R}$ et $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère lié à $\mathcal{R}'$.

La position d'un point matériel M est repérée dans $\mathcal{R}$ par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

et dans $\mathcal{R}'$ par
$$\overrightarrow{O'M} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3\,.$$
La vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par
$$\vec{v}_M = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
et la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$ est définie par
$$\vec{v}'_M = \dot{a}_1\,\vec{e}_1 + \dot{a}_2\,\vec{e}_2 + \dot{a}_3\,\vec{e}_3\,.$$
De même, l'accélération par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par
$$\vec{a}_M = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$
et l'accélération par rapport à $\mathcal{R}'$ est définie par
$$\vec{a}'_M = \ddot{a}_1\,\vec{e}_1 + \ddot{a}_2\,\vec{e}_2 + \ddot{a}_3\,\vec{e}_3\,.$$
Comment ces vitesses et ces accélérations sont-elles reliées entre elles ?

Pour répondre à cette question, il suffit d'observer que le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est entièrement défini par deux vecteurs :
— $\vec{v}_{O'}$, la vitesse de O' par rapport à $\mathcal{R}$;
— $\vec{\omega}$, le vecteur rotation qui décrit l'évolution temporelle des vecteurs $\mathbf{e}_i$:
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{e}_i\,.$$
On en déduit les relations suivantes. D'abord pour la vitesse :
$$\begin{aligned}
\vec{v}_M \equiv \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{v}_{O'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3\right) \\
&= \vec{v}_{O'} + \dot{a}_1\,\vec{e}_1 + a_1\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t} + \dot{a}_2\,\vec{e}_2 + a_2\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t} + \dot{a}_3\,\vec{e}_3 + a_3\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + a_1\,\vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 + a_2\,\vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 + a_3\,\vec{\omega} \wedge \vec{e}_3 \\
&= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\,,
\end{aligned}$$
soit finalement
$$\underbrace{\vec{v}_M}_{\text{vitesse « absolue »}} = \underbrace{\vec{v}'_M}_{\text{vitesse « relative »}} + \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse « d'entraînement »}} = \vec{v}'_M + \vec{v}_{\mathrm{e}\,M}\,.$$
La vitesse d'entraînement correspond à la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point immobile dans $\mathcal{R}'$ confondu avec M à l'instant t.

> **Remarque.** Si $\mathcal{R}'$ est simplement en translation par rapport à $\mathcal{R}$ ($\vec{\omega} = \vec{0}$), on a le résultat intuitif
> $$\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'}\,,$$
> simple translation du vecteur vitesse.

Pour l'accélération, on a
$$\begin{aligned}
\vec{a}_M \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}_M &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_{O'} + \vec{v}'_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}_{O'}}_{=\vec{a}_{O'}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{a}_1\,\vec{e}_1 + \dot{a}_2\,\vec{e}_2 + \dot{a}_3\,\vec{e}_3\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\,.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{a}_1\,\vec{e}_1+\dot{a}_2\,\vec{e}_2+\dot{a}_3\,\vec{e}_3\right)&=\ddot{a}_1\,\vec{e}_1+\ddot{a}_2\,\vec{e}_2+\ddot{a}_3\,\vec{e}_3+\dot{a}_1\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t}+\dot{a}_2\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t}+\dot{a}_3\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t}\\&=\vec{a}'_M+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_M\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)&=\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\\&=\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}'_M+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\\&=\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_M+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right),\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\underbrace{\vec{a}_M}_{\text{accélération « absolue »}}=\underbrace{\vec{a}'_M}_{\text{« relative »}}+\underbrace{\vec{a}_{O'}+\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}_{\text{« d'entraînement »}}+\underbrace{2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_M}_{\text{« complémentaire »}}.$$

L'accélération complémentaire est aussi appelée accélération de Coriolis. On a alors

$$\vec{a}_M=\vec{a}'_M+\vec{a}_{\mathrm{e}\,M}+\vec{a}_{\mathrm{C}\,M}\,.$$

Remarques.

1. L'expression des vitesses et des accélérations en coordonnées cylindriques et sphériques peuvent être vues comme des applications de ces relations en considérant comme référentiel relatif :
   — le référentiel $\mathcal{R}'$ auquel le repère $(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z)$ est lié pour les coordonnées cylindriques ;
   — le référentiel $\mathcal{R}'$ auquel le repère $(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi)$ est lié pour les coordonnées sphériques.

   Comme l'origine O est la même que pour le référentiel absolu, il n'y a pas de termes $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{a}_{O'}$, et les autres termes calculés pour $O'=O$ redonnent exactement les formules vues précédemment en coordonnées cylindriques et sphériques.
2. Le terme $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$ est parfois appelé **accélération centripète**. En effet, si

   $$\overrightarrow{O'M}=\rho\,\vec{e}_\rho+z\,\vec{e}_z\quad\text{et}\quad\vec{\omega}=\omega\,\vec{e}_z\,,$$

   alors

   $$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}=\rho\omega\,\vec{e}_\phi\quad\Longrightarrow\quad\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)=-\rho\omega^2\,\vec{e}_\rho\,.$$

III. Principe fondamental dans un référentiel quelconque

Supposons que le référentiel $\mathcal{R}$ soit un référentiel dans lequel la première loi de Newton s'applique. Un tel référentiel est appelé **référentiel inertiel**. Dans un tel référentiel, la deuxième loi de Newton prend la forme

$$m\,\vec{a}_M=\vec{F}\,,$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées. Qu'en est-il dans un référentiel quelconque ?

D'après ce qui précède, on a

$$m\,\vec{a}'_M + m\,\vec{a}_{\mathrm{e}\,M} + m\,\vec{a}_{\mathrm{C}\,M} = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad m\,\vec{a}'_M = \vec{F} - m\,\vec{a}_{\mathrm{e}\,M} - m\,\vec{a}_{\mathrm{C}\,M}\,,$$

ou encore

$$m\,\vec{a}'_M = \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{ie}} + \vec{F}_{\mathrm{iC}}\,,$$

où $\vec{F}_{\mathrm{ie}} = -m\,\vec{a}_{\mathrm{e}\,M}$ est la force d'inertie d'entraînement et $\vec{F}_{\mathrm{iC}} = -m\,\vec{a}_{\mathrm{C}\,M}$ est la force de Coriolis. De façon plus détaillée, ces forces supplémentaires prennent la forme

$$\vec{F}_{\mathrm{ie}} = -m\,\vec{a}_{O'} - m\,\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} - m\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\mathrm{iC}} = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_M\,.$$

> **Cas particulier.** Si le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire si $\vec{v}_{O'}$ est constante et $\vec{\omega} = \vec{0}$, alors $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$ et
>
> $$\vec{F}_{\mathrm{ie}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\mathrm{iC}} = \vec{0}\,.$$
>
> Dans un tel référentiel, la deuxième loi de Newton prend la même forme que dans un référentiel d'inertie :
>
> $$m\,\vec{a}'_M = \vec{F}\,,$$
>
> où $\vec{F}$ est la somme des forces appliquées. Un tel référentiel est dit **galiléen**.

> **Remarque.** Le terme $-m\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ est parfois appelé **force centrifuge**. En effet, il est opposé à l'accélération centripète, et il pointe donc vers l'extérieur.

IV. Référentiels en translation non uniforme

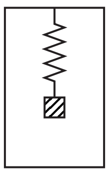
Si un référentiel est simplement en translation par rapport à un autre, $\vec{\omega} = \vec{0}$ (et bien sûr $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$), et les formules se réduisent à

$$\begin{cases} \vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'} \\ \vec{a}_M = \vec{a}'_M + \vec{a}_{O'} \end{cases}$$

avec $\vec{a}_{O'} \neq \vec{0}$ si la translation n'est pas uniforme. La présence de cette accélération donne lieu à des forces d'inertie aux conséquences parfois déroutantes. Voyons-le sur quelques exemples.

1. Ressort dans un ascenseur

Un ressort est accroché à un ascenseur soumis à une accélération $\vec{a}$. Quel est l'allongement produit par une masse m ?



Dans le référentiel de l'ascenseur, la masse est soumise à trois forces :

— son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$;

— la force de rappel du ressort

$$\vec{F} = k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_z\,;$$

— la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{\text{ie}} = -m\,\vec{a}\,.$$

Dans le référentiel de l'ascenseur, l'équation du mouvement de la masse est donc donnée par

$$m\,\vec{a}'_m = m\,\vec{g} + k\,(\ell - \ell_0)\;\vec{e}_z - m\,\vec{a}\,.$$

À l'équilibre, $\vec{a}'_m = \vec{0}$, donc

$$m\,\vec{g} + k\,(\ell - \ell_0)\;\vec{e}_z - m\,\vec{a} = \vec{0}\,.$$

Projetons sur $\vec{e}_z$:

$$\vec{g}\cdot\vec{e}_z = -g \quad \text{et} \quad \vec{a}\cdot\vec{e}_z = a\,,$$

ce qui mène à

$$k\,(\ell - \ell_0) = m\,(g + a)\;,$$

et donc finalement

$$\boxed{\ell - \ell_0 = \frac{m}{k}\,(g + a)\,.}$$

Si $a > 0$, alors l'allongement est plus grand. Si $a = -g$, l'allongement est nul : l'ascenseur et le ressort sont en chute libre.

Remarque. On peut retrouver le même résultat dans le référentiel du laboratoire. L'équation du mouvement est donnée par

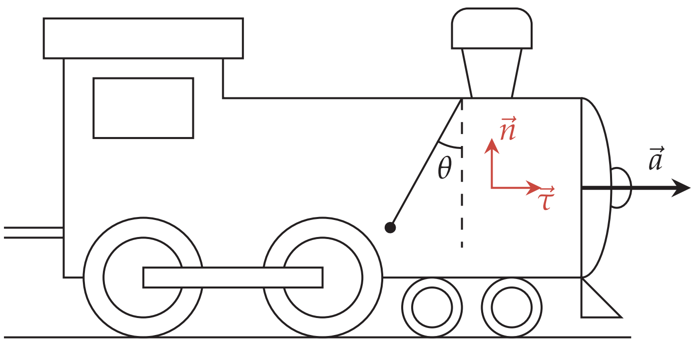
$$m\,\vec{a}_m = \vec{P} + k\,(\ell - \ell_0)\;\vec{e}_z\,,$$

et la condition d'équilibre correspond à $\vec{a}_m = \vec{a}$ (la masse a la même accélération que l'ascenseur), d'où

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + k\,(\ell - \ell_0)\;\vec{e}_z\,.$$

C'est la même équation, mais la condition d'équilibre est moins intuitive.

2. Pendule dans un train



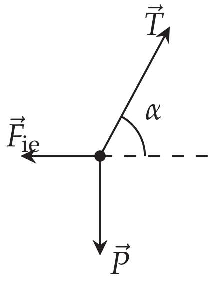
Que vaut l'angle θ à l'équilibre ?

Dans le référentiel du wagon, la masse est soumise à trois forces :

— son poids $\vec{P}$;

— la tension du fil $\vec{T}$;

— la force d'inertie $\vec{F}_{\text{ie}} = -m\,\vec{a}$.



À l'équilibre, $\vec{a}' = \vec{0}$:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{\mathrm{ie}} = \vec{0}\,.$$

Projetons d'abord sur $\vec{\tau}$ (horizontal), en nommant α l'angle entre $\vec{T}$ et $\vec{\tau}$:

$$\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{\tau}}_{=0} + \vec{T}\cdot\vec{\tau} + \vec{F}_{\mathrm{ie}}\cdot\vec{\tau} = 0 \quad\Longrightarrow\quad T\cos\alpha - ma = 0\,.$$

Or, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ donc $\cos\alpha = \sin\theta$:

$$\boxed{T\sin\theta = ma\,.}$$

Projetons maintenant sur $\vec{n}$ (vertical) :

$$\vec{P}\cdot\vec{n} + \vec{T}\cdot\vec{n} + \vec{F}_{\mathrm{ie}}\cdot\vec{n} = 0 \Longrightarrow -mg + T\cos\theta = 0 \Longrightarrow T\cos\theta = mg \Longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}\,.$$

La première équation conduit à

$$mg\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = ma\,,$$

soit finalement

$$\boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}\,.}$$

De nouveau, on peut bien sûr résoudre le problème dans le référentiel du laboratoire en écrivant que l'accélération à l'équilibre est égale à $\vec{a}$.

3. Pendule dans un train sur un plan incliné

On suppose cette fois que le wagon glisse sans frottement sur un plan incliné. Quelle est l'orientation du pendule ?

Procédons en deux étapes.

a) L'ensemble wagon + pendule a la masse $M+m$, et il est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$:

$$(M+m)\,\vec{a} = (M+m)\,\vec{g} + \vec{R} \quad \text{soit} \quad \vec{R} = (M+m)\left(\vec{a} - \vec{g}\right)\,.$$

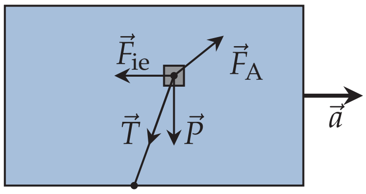
b) Dans le référentiel du wagon, le pendule est soumis à trois forces : son poids $m\,\vec{g}$, la tension $\vec{T}$ et la force d'inertie $-m\,\vec{a}$. À l'équilibre,

$$m\,\vec{g} + \vec{T} - m\,\vec{a} = \vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \vec{T} = m\left(\vec{a} - \vec{g}\right)\,.$$

$\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{R}$ donc il est perpendiculaire au plan incliné. Le pendule est perpendiculaire au plafond du train !

4. Accéléromètre à main

Un objet flotte dans un liquide plus dense que lui. Il est attaché à la base du récipient. On accélère le récipient avec une accélération $\vec{a}$. Dans quelle direction pend le fil ?



Plaçons-nous dans le ré férentiel en mouvement, et appelons M la masse du fluide déplacé. Ce volume serait soumis à la force

$$M\vec{g} - M\vec{a}\,.$$

Ainsi, la force d'Archimède exercée par le fluide sur l'objet est

$$\vec{F}_{\mathrm{A}} = -M\vec{g} + M\vec{a}\,.$$

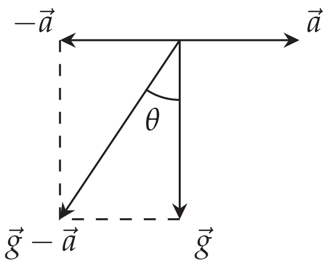
L'objet est soumis à quatre forces, dont la somme est nulle à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{\mathrm{ie}} + \vec{F}_{\mathrm{A}} = \vec{0}\,,$$

soit

$$m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a} - M\vec{g} + M\vec{a} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{T} = (M-m)\left(\vec{g} - \vec{a}\right)\,,$$

avec $M - m > 0$ puisque le fluide est plus dense que l'objet. Donc la tension est orientée selon $\vec{g} - \vec{a}$.



Le fil penche donc dans la direction de $\vec{a}$! L'angle θ est donné par

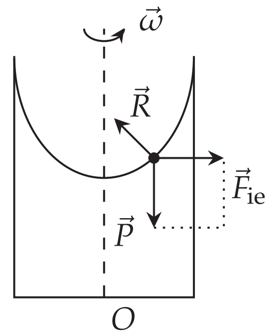
$$\boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}\,.}$$

V. Référentiels en rotation uniforme

Les deux forces d'inertie, la force centrifuge et la force de Coriolis, ont des effets très intuitifs sur deux exemples.

1. Liquide en rotation

Une goutte à la surface est au repos dans le référentiel tournant.

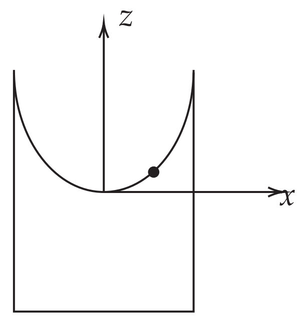


Elle est soumise à trois forces :

$$\vec{P} + \vec{R} \underbrace{- m\,\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)}_{= \vec{F}_{\text{cent}}\,:\ \text{force centrifuge}} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{au repos}}$$

Comme $\vec{R}$ est perpendiculaire à la surface, on en déduit que la surface est perpendiculaire au vecteur $\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}}$:

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ -mg \end{pmatrix} .$$



Or, le vecteur $\vec{t}$ de composantes $(1, z'(x))$ est tangent à courbe. En effet, si on appelle A le point de coordonnées $(x, z(x))$ et B le point de coordonnées $(x + \varepsilon, z(x + \varepsilon))$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ devient tangent à la courbe à la limite $\varepsilon \to 0$. Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(\varepsilon, z(x + \varepsilon) - z(x))$. Il est proportionnel au vecteur $\vec{t}(\varepsilon)$ de composantes $(1, (z(x + \varepsilon) - z(x))/\varepsilon)$ qui tend vers $\vec{t}$ quand $\varepsilon \to 0$.

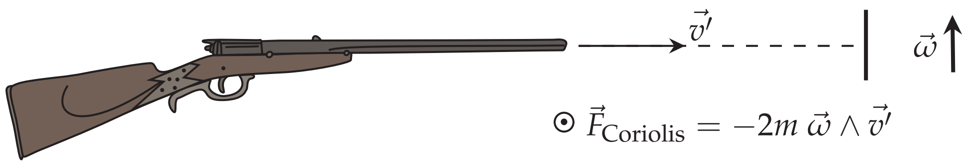
On en déduit :

$$\vec{t} \cdot \left(\vec{P} + \vec{F}_{\text{cent}}\right) = 0 \Longrightarrow m\omega^2 x - mgz'(x) = 0 \Longrightarrow z'(x) = \frac{\omega^2}{g}\,x \Longrightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\,x^2 .}$$

Le liquide forme un **paraboloïde de révolution**.

2. Fusil tournant

Imaginons un fusil tirant une balle à l'horizontale tout en tournant autour d'un axe vertical.



La balle est déviée par la force de Coriolis.

VI. Dynamique terrestre

La Terre n'est pas un référentiel d'inertie. En première approximation, on peut considérer qu'elle tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de l'axe de ses pôles par rapport à un référentiel d'inertie, le référentiel de Ptolémée (ou référentiel géocentrique).

Dans le référentiel de la Terre, la mouvement est régi par l'équation

$$m\,\vec{a} = \vec{F} + m\,\vec{g} - 2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,,$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces extérieures (sauf le poids) et

$$\vec{g} = \vec{g}^{\mathrm{grav}}(\vec{r}) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

avec

$$\vec{g}^{\mathrm{grav}}(\vec{r}) = -g(r)\,\vec{e}_r$$

le champ de gravitation, où $\vec{r} = \overrightarrow{CM}$ est mesuré par rapport au centre de la Terre C. Cette équation est une conséquence du fait que C est immobile et que $\vec{\omega}$ est constant.

Le champ de gravitation apparent $\vec{g}$ est appelé **champ de pesanteur**. Son orientation par rapport à $\vec{g}^{\mathrm{grav}}(\vec{r})$ dépend de la latitude λ. On a

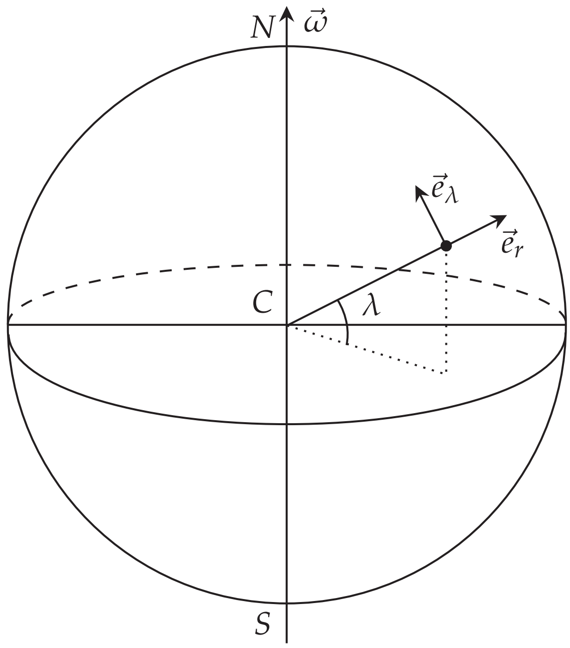
$$\vec{\omega} = \omega\,(\sin\lambda\,\vec{e}_r + \cos\lambda\,\vec{e}_\lambda) \quad \text{et} \quad \vec{r} = r\,\vec{e}_r\,,$$

donc

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = r\omega\cos\lambda\,(\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r)$$

et

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = r\omega^2 \sin\lambda\cos\lambda\,\vec{e}_r \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) + r\omega^2\cos^2\lambda\,\vec{e}_\lambda \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r)\;.$$



Posons $\vec{e}_3 = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_\lambda \quad &\Longrightarrow \quad \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) = \vec{e}_\lambda \\ \vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_r \quad &\Longrightarrow \quad \vec{e}_\lambda \wedge (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) = -\vec{e}_r\,, \end{aligned}$$

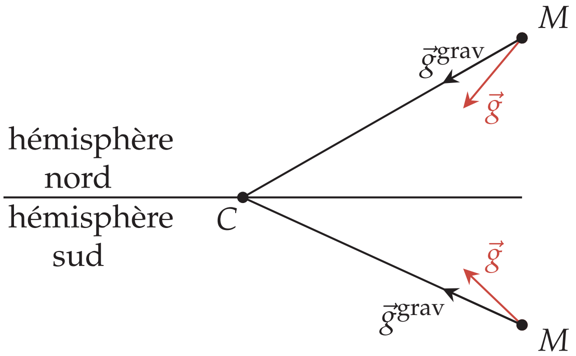
ce qui nous amène à

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = r\omega^2 \left(-\cos^2\lambda\,\vec{e}_r + \sin\lambda\cos\lambda\,\vec{e}_\lambda\right)$$

et donc

$$\vec{g} = \vec{g}^{\text{grav}}(\vec{r}) + r\omega^2 \left(\cos^2\lambda\,\vec{e}_r - \sin\lambda\cos\lambda\,\vec{e}_\lambda\right) .$$

Le champ de pesanteur n'est pas strictement radial. Il est radial à l'équateur ($\lambda = 0$) et aux pôles ($\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$).



La direction de $\vec{g}$ correspond à celle d'un fil à plomb : $\vec{T} = -m\vec{g}$.

Remarque. Les corrections sont très petites ($\simeq 10^{-3}$).

Si l'on adopte $\vec{g}$ comme le champ de pesanteur, le seul effet de la rotation de la Terre, c'est la force de Coriolis :

$$\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v} \,.$$

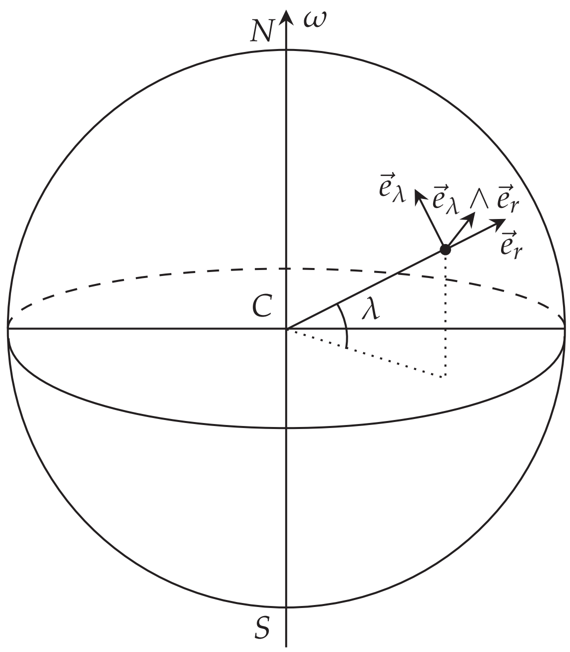
Cette force a plusieurs effets remarquables.

1. Déviation vers l'est

Si un corps tombe à la verticale à la vitesse $\vec{v} = -v\,\vec{e}_r$, il subit la force de Coriolis :

$$\vec{F}_C = -2m\omega\,(\sin\lambda\,\vec{e}_r + \cos\lambda\,\vec{e}_\lambda) \wedge (-v\,\vec{e}_r) = 2m\omega v\cos\lambda\,(\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r) \;.$$

Le vecteur $\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_r$ est orienté vers l'est.



Un objet qui chute est dévié vers l'est, que la chute ait lieu dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud.

Par ailleurs, comme $\vec{g}$ n'est pas strictement radial, il est dévié vers le sud dans l'hémisphère nord et vers le nord dans l'hémisphère sud.

Remarque. On peut aussi comprendre la déviation vers l'est dans le référentiel géocentrique (centre de la Terre et trois étoiles fixes). L'objet à la hauteur h a une vitesse $(R+h)^2\omega$ (où R est le rayon de la Terre), le point où il devrait tomber une vitesse $R^2\omega$. Lorsqu'on le lâche, cet objet décrit une ellipse dont C est un foyer. D'après la loi des aires,

$$r^2\dot{\phi} = \text{cte}.$$

Au départ, $r = R+h$ et $\dot{\phi} = \omega$. À l'arrivée, $r = R$ et donc $\dot{\phi} > \omega$. Donc, pendant la chute, la vitesse de rotation de l'objet augmente, d'où la déviation vers l'est.

2. Pendule de Foucault

Considérons un pendule qui oscille dans un plan tangent à la Terre. Si le fil est très long et les oscillations petites, on peut considérer qu'il reste dans le plan, et que sa vitesse n'a pas de composante suivant $\vec{e}_r$:

$$\vec{v} = v_\lambda\,\vec{e}_\lambda + v_3\,\vec{e}_3\,.$$

Plaçons-nous dans un référentiel tournant par rapport à la Terre avec une vitesse

$$\vec{\omega}' = -\omega\sin\lambda\,\vec{e}_r\,.$$

La vitesse totale de rotation est la somme des vitesses de rotation (voir démonstration à la fin du chapitre). Elle est donc donnée par

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\omega}' = \omega\cos\lambda\,\vec{e}_\lambda\,.$$

Dans ce référentiel, la force de Coriolis est donnée par

$$-2m\,\vec{\omega}_{\text{tot}} \wedge \vec{v} = -2m\omega\cos\lambda v_3\,\underbrace{\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_3}_{=\vec{e}_r}\,.$$

Cette force est parallèle à $\vec{e}_r$, et elle est compensée par la tension. Donc dans ce référentiel la force de Coriolis est sans effet et les oscillations se font dans un plan.

Dans le référentiel de la Terre, le plan des oscillations tourne donc à la vitesse angulaire

$$\vec{\omega}' = -\omega\sin\lambda\,\vec{e}_r\,.$$

Dans l'**hémisphère nord**, $\lambda > 0$, donc $\omega'_r < 0$ et ainsi le pendule tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans l'**hémisphère sud**, $\lambda < 0$, donc $\omega'_r > 0$ et ainsi le pendule tourne dans le sens trigonométrique. La période est donnée par

$$\boxed{\frac{24}{\sin\lambda}\ \text{heures.}}$$

Aux pôles, la période est donc de 24 heures. À Lausanne, $\lambda = 46,5\,\text{deg}$, la période est $T = 33$ heures. À l'équateur, on a $T \longrightarrow +\infty$: il n'y a pas de rotation.

Complément. Loi de composition des vitesses angulaires
On considère 3 référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$. Le mouvement de $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$ est décrit par $\vec{v}_{O'}$ et $\vec{\omega}$, et celui de $\mathcal{R}''/\mathcal{R}'$ par $\vec{v}_{O''}$ et $\vec{\omega}'$.
Question : Quels sont les vecteurs décrivant le mouvement de $\mathcal{R}''/\mathcal{R}$?
D'après les règles de changement des vitesses, on a :

$$\vec{v}_M = \vec{v}'_M + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

et

$$\vec{v}'_M = \vec{v}''_M + \vec{v}'_{O''} + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O''M}$$

d'où

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_{O''} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}' \wedge \overrightarrow{O''M}$$

soit

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}'_{O''} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'0''} + (\vec{\omega} + \vec{\omega}') \wedge \overrightarrow{O''M}\,.$$

Or, par définition de $\vec{v}_{O''}$ et $\vec{\omega}''$, on a :

$$\vec{v}_M = \vec{v}''_M + \vec{v}_{O''} + \vec{\omega}'' \wedge \overrightarrow{O''M}\,.$$

On en déduit que

$$\vec{v}''_O = \vec{v}'_{O''} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'O''}\,,$$

et que

$$\vec{\omega}'' = \vec{\omega} + \vec{\omega}'\,.$$

La vitesse angulaire totale est donc la somme des vitesses angulaires relatives.