5

Moment cinétique et force centrale, gravitation

> *« Le moins de péché possible, c'est la loi de l'homme. Pas de péché du tout est le rêve de l'ange. Tout ce qui est terrestre est soumis au péché. Le péché est une gravitation. »*
>
> — Victor Hugo

Dans un mouvement rectiligne uniforme, la vitesse est constante. Dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un point O, la vitesse n'est pas conservée, mais il y a néanmoins une quantité conservée. En effet, si $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{a}}_{=\vec{0} \text{ car } \vec{a} /\!/ \vec{r}} = \vec{0}\,.$$

Cela suggère d'introduire, à côté de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$, le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés du moment cinétique, et d'en déduire la solution générale du problème d'un point matériel soumis à une force centrale, avec application à la gravitation.

I. Moment cinétique

Définition (Moment cinétique)**.** Le **moment cinétique** par rapport à un point O d'un point M ayant la vitesse $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}\,.$$

Si O est l'origine du repère, on note $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, et le moment cinétique est simplement noté

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}\,.}$$

On peut définir le moment cinétique par rapport à n'importe quel point. Dans ce cas, on a

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge m\,\vec{v} + \vec{L}_O\,.$$

En effet,

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\,\vec{v} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge m\,\vec{v} = \overrightarrow{AO} \wedge m\,\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}\,.$$

Définition (Moment d'une force)**.** On définit de façon similaire le **moment d'une force** s'appliquant au point M par rapport à un point O par

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\,.$$

Le moment d'une force par rapport à un point O mesure sa capacité à faire tourner le point matériel qui est soumis à cette force autour de ce point. En particulier, si $\vec{F} \,/\!/\, \overrightarrow{OM}$, le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est nul.

Théorème (Théorème du moment cinétique)**.** La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point O est égale au moment par rapport au point O de la somme $\vec{F}$ des forces appliquées au point matériel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du principe fondamental :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0 \text{ car } \vec{v} /\!/ \vec{p}} + \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{F}}\,.$$

II. Mouvement à force centrale

Définition. Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** si elle pointe toujours en direction d'un même point O : $\vec{F}(M) \,/\!/\, \overrightarrow{OM}$.

Exemples.

1. La force de gravitation exercée par une particule sur une autre est une force centrale centrée sur la particule. Si l'on prend la position de la particule comme centre du repère en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{F} = -\frac{C}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

2. La force exercée par un ressort attaché en un point O est aussi une force centrale. Si le ressort peut prendre n'importe quelle direction, la force est donnée par

$$\vec{F} = k\,(\ell_0 - r)\,\vec{e}_r\,,$$

où ℓ_0 est la longueur au repos du ressort.

Proposition. Si une force centrale est conservative, le potentiel associé ne dépend que de r.

Complément (Démonstration). Considérons un potentiel $V(r,\theta,\phi)$. Son gradient en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi\,.$$

Pour s'en convaincre, considérons V comme fonction de $\vec{r}(t)$. En cartésiennes,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\left(\vec{r}(t)\right) = \frac{\partial V}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\dot{z} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{v}\,.$$

En sphériques,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\vec{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\dot{\phi} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{v}\,.$$

Sachant que $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi$, $\vec{\nabla} V \cdot \vec{v}$ redonnera l'expression $\frac{\partial V}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\dot{\phi}$ si $\vec{\nabla} V$ est donné par l'expression annoncée.

Ainsi, pour que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ soit proportionnel à $\vec{e}_r$, il faut que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0\,,$$

donc que V ne dépende que de r.

Pour la gravitation, nous avons déjà vu que

$$V(r) = -\frac{C}{r}\,,$$

en accord avec $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r$. Pour le ressort, on a de même

$$V(r) = \frac{1}{2}k\,(r - \ell_0)^2\,.$$

Théorème. Si un point matériel est soumis à une force centrale de centre O, son moment cinétique par rapport à O est constant.

Démonstration. On a simplement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = 0$$

puisque, par hypothèse, $\vec{F} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{OM}$.

Dans ce cas, le moment cinétique est une intégrale première (ou plus exactement un ensemble de 3 intégrales premières, chaque composante étant conservée).

III. Solution générale du mouvement à force centrale dérivant de $V(r)$

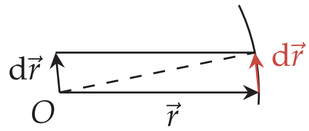
Lorsqu'un point matériel est soumis à une force centrale, le mouvement possède un certain nombre de propriétés générales.

1. Le mouvement se fait dans un plan. En effet, $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$, ce qui implique, si $\vec{L}$ est constant, que $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à la direction de $\vec{L}$, donc que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}$ contenant O.
2. Si on se place en coordonnées sphériques avec l'axe $Oz \mathbin{/\!/} \vec{L}$ et l'angle $\theta = \pi/2$, ou de façon équivalente en coordonnées polaires dans le plan où se situe le mouvement, on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi \quad &\text{et} \quad \vec{r} = r\,\vec{e}_r \\ \Longrightarrow \vec{L} &= mr\,\vec{e}_r \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\right) \\ \Longrightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\phi}\,\vec{e}_z\,, &\quad \left\|\vec{L}\right\| = L = mr^2\dot{\phi}\,. \end{aligned}$$

3. Le mouvement suit la **loi des aires** :
« La surface balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps est constante. »
En effet, si l'on définit l'aire balayée par $\mathrm{d}\mathcal{A}$ par la norme de $\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge \mathrm{d}\vec{r}$, c'est-à-dire la moitié de la surface du parallélogramme engendré par $\vec{r}$ et $\mathrm{d}\vec{r}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2m}\|\vec{r} \wedge \vec{p}\| = \frac{1}{2m}\left\|\vec{L}\right\| = \frac{L}{2m} = \text{cte}.$$



4. **Conservation de l'énergie** : l'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 .$$

L'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle $V(r)$ est conservée :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + V(r) = E = \text{cte}.$$

Mais $mr^2\dot{\phi} = L = \text{cte}$:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + V(r) = E .$$

C'est un mouvement unidimensionnel dans un **potentiel effectif** donné par

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + V(r) .$$

C'est la forme de ce potentiel effectif qui doit être utilisée pour discuter la nature générale du mouvement (points d'équilibre, stabilité, *etc.*)

Complément (Equation générale de la trajectoire). Le long de la trajectoire, on peut considérer que $\phi(t)$ est en fait une fonction de $r(t)$, $\phi(r(t))$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} .$$

Or,

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \quad \text{et} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{r^2\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))}} .$$

On en déduit que

$$\phi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{L\,\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r'))}} + \phi_0 .$$

C'est l'équation générale de la trajectoire pour un mouvement central.

IV. Problème de Kepler

Le problème de Kepler correspond à la gravitation, avec

$$V(r) = -\frac{C}{r}, \quad C > 0 .$$

Le potentiel effectif est donné par

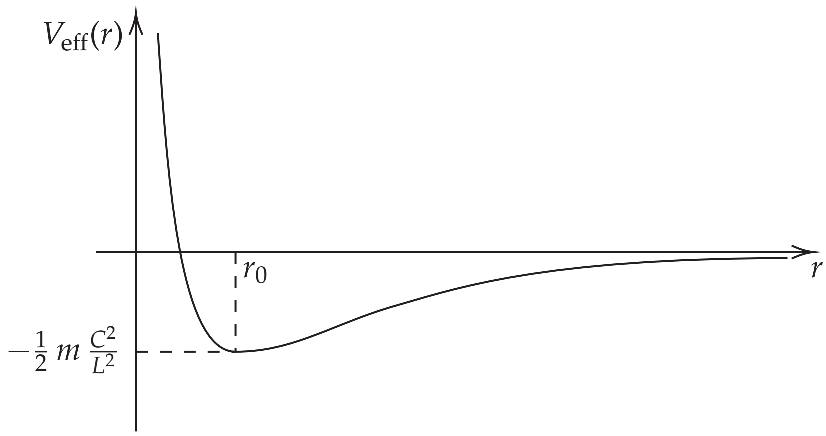
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{C}{r}\,.$$

Il diverge vers le haut quand $r \longrightarrow 0$, il tend vers 0 quand $r \longrightarrow +\infty$, et il passe par un minimum quand

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{C}{r^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \frac{L^2}{mC}\,.$$

En ce point,

$$V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{mC^2}{L^2}\,.$$



Le mouvement n'est possible que si

$$E \geq -\frac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{L^2}\,.$$

Il y a trois cas de figure :

— si $E = - -\frac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{L^2}$, $\dot{r} = 0$ et le mouvement est circulaire ;

— si $-\frac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{L^2} < E < 0$, le mouvement oscille entre deux rayons r_1 et r_2 ;

— si $E \geq 0$, le point matériel part à l'infini.

Complément. Pour trouver les trajectoires, on peut utiliser la formule générale donnée par une intégrale (exercice), mais il est plus simple de décrire la trajectoire par

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}\,.$$

Ainsi,

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\,\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,\dot{\phi} = -\frac{1}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,\frac{L}{m}\,u^2 = -\frac{L}{m}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,,$$

ce qui permet de réécrire l'énergie sous la forme

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2\right] - Cu\,.$$

Comme l'énergie mécanique est constante, la dérivée de cette expression par rapport à ϕ doit être constante, d'où

$$\frac{L^2}{m}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} + \frac{L^2}{m}\,u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} - C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = 0\,,$$

soit donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{Cm}{L^2}\,.}$$

La solution générale de cette équation différentielle est bien connue. C'est la somme de la solution générale

$$u = A\cos(\phi - \phi_0)$$

et d'une solution particulière

$$u = \frac{Cm}{L^2}\,.$$

Si l'on pose $p = \dfrac{L^2}{Cm}$ et $e = Ap$, il vient

$$u = \frac{e\cos(\phi - \phi_0) + 1}{p}\,,$$

soit donc

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \phi_0)}\,.}$$

Il s'agit de l'équation en coordonnées polaires d'une **conique** :

— si $e = 0$, c'est un cercle ;

— si $0 < e < 1$, c'est une ellipse ;

— si $e = 1$, c'est une parabole ;

— si $e > 1$, c'est une hyperbole.

L'énergie mécanique est donnée par

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2\right] - Cu \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = +\frac{e}{p}\sin(\phi - \phi_0)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}
E =& \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left[\frac{e^2}{p^2}\sin^2(\phi - \phi_0) + \frac{e^2}{p^2}\cos^2(\phi - \phi_0)\,2\,\frac{e}{p^2}\cos(\phi - \phi_0) - \frac{1}{p^2}\right] \\
&- C\frac{e}{p}\cos(\phi - \phi_0) - \frac{C}{p} \\
=& \frac{1}{2}Cp\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{2e}{p^2}\cos(\phi - \phi_0) + \frac{1}{p^2}\right] - \frac{Ce}{p}\cos(\phi - \phi_0) - \frac{C}{p} \\
=& -\frac{1}{2}\frac{C}{p} + \frac{1}{2}C\frac{e^2}{p}\,,
\end{aligned}$$

soit donc

$$\boxed{E = -\frac{C}{p}\left(1 - e^2\right).}$$

Si $e < 1$, $E < 0$: le mouvement doit être limité entre deux longueurs, ce qui est compatible avec une ellipse. Par contre, si $e \geq 1$, le mouvement n'est pas fermé. e est appelée l'**excentricité de la conique**.

V. Les lois de Kepler

Historiquement, Kepler a compris le mouvement des planètes avant que Newton ne formule ses lois, et ce sur la base des observations de son maître Tycho Brahé. Ces lois peuvent être formulées de la façon suivante.

Loi 1 (1re loi de Kepler)**.** Les trajectoires des planètes sont des ellipses, dont le Soleil est un foyer.

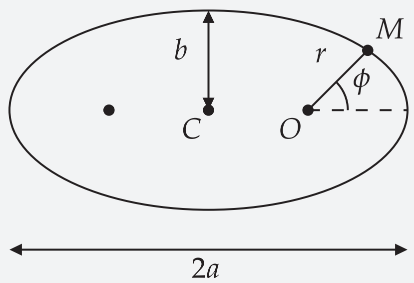
Loi 2 (2e loi de Kepler)**.** Le rayon-vecteur du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des temps égaux.

Loi 3 (3e loi de Kepler)**.** Si l'on désigne par T la période et a le demi-grand axe de l'ellipse, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes.

Ce sont en grande partie ces lois qui ont amené Newton à sa formulation de la gravitation. Dans ces notes, nous faisons le chemin inverse et démontrons que ces lois sont des conséquences de la gravitation.

Complément (Démonstration des lois de Kepler)**.** Commençons par la première. Si une planète tourne autour du soleil, c'est que $e < 1$, et la trajectoire est une ellipse. L'origine du repère est ce que l'on appelle un **foyer**. Si l'on prend $\phi_0 = 0$, l'équation est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \,.$$



Calculons le demi-grand axe a et le demi-petit axe b en supposant qu'il s'agit bien d'une ellipse :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = -\frac{e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2} = 0 \quad \text{pour} \quad \phi = 0, \pi \,,$$

on en déduit

$$2a = \underbrace{r(\phi = 0)}_{\text{min}} + \underbrace{r(\phi = \pi)}_{\text{max}} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = p\,\frac{2}{1-e^2} \,,$$

soit finalement

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2} \,.}$$

La coordonnée cartésienne y a pour valeur maximale b. Or,

$$y(\phi) = r\sin\phi = \frac{p\sin\phi}{1+e\cos\phi} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = p\frac{(1+e\cos\phi)\cos\phi - \sin\phi\,(-e\sin\phi)}{(1+e\cos\phi)^2} \,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 0 \Longrightarrow (1+e\cos\phi)\cos\phi + e\sin^2\phi = 0 \Longrightarrow \cos\phi + e = 0 \Longrightarrow \cos\phi = -e \,.$$

Pour cette valeur de ϕ,

$$y = \frac{p}{1-e^2}\sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{p}{1-e^2}\sqrt{1-e^2} \,,$$

soit finalement

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \,.}$$

Si l'on définit des coordonnées cartésiennes d'origine C, que l'on appelle X et Y, on a

$$X = x + a - r(\phi = 0) = x + \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = x + \frac{ep}{1-e^2}\,,$$

soit

$$X = x + ea \quad \mathrm{Y} \quad = y\,.$$

Proposition. X et Y sont reliés par

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\,.}$$

Démonstration. On a le développement suivant :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{p}{1+e\cos\phi}\\
r + \underbrace{re\cos\phi}_{=ex} &= a\left(1-e^2\right)\\
r &= a\left(1-e^2\right) - ex\\
r^2 &= a^2\left(1-e^2\right)^2 + e^2x^2 - 2a\left(1-e^2\right)ex\\
x^2 + y^2 - e^2x^2 + 2ea\left(1-e^2\right)x &= a^2\left(1-e^2\right)^2\\
x^2\left(1-e^2\right) + y^2 + 2eax\left(1-e^2\right) &= a^2\left(1-e^2\right)^2\\
x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + 2aex &= a^2\left(1-e^2\right)\\
(x+ea)^2 - e^2a^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= a^2 - a^2e^2\\
(x+ea)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= a^2\\
\frac{(x+ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)} &= 1\\
\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1\,.
\end{aligned}$$

La deuxième loi est tout simplement la loi des aires, qui est valable pour tout mouvement à force centrale.

Démontrons la troisième loi : D'après la loi des aires, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}$. En intégrant sur une période T, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} &= T\frac{L}{2m}\\
\Rightarrow \mathcal{A}(T) - \mathcal{A}(0) &= T\frac{L}{2m}\\
\Rightarrow \pi ab &= T\frac{L}{2m}\\
\Rightarrow T &= \pi ab\frac{2m}{L}
\end{aligned}$$

puisque l'aire de l'ellipse est égale à πab. Mais

$$p = \frac{L^2}{Cm} \Longrightarrow L = \sqrt{Cmp} \quad \text{et} \quad p = a\left(1-e^2\right) \Longrightarrow L = \sqrt{Cm\left(1-e^2\right)}\sqrt{a}\,,$$

donc

$$T = \pi a\underbrace{a\sqrt{1-e^2}}_{=b}\frac{2m}{\sqrt{Cm\left(1-e^2\right)}}\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{\frac{3}{2}}2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{m}{C}\,.$$

Mais la constante est $C = GMm$, où M est la masse du Soleil et m la masse de la planète. Finalement, on a

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}},$$

qui est bien indépendant de m.