4

Forces, travail et énergie

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. »

— Antoine Lavoisier

I. Les différents types de force

Un objet en interaction avec son environnement peut être soumis à de nombreux types de force.

1. Interaction à distance entre particules

L'exemple le plus évident, c'est la **gravitation** entre deux particules massives :

$$\vec{F}_{2\to 1} = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\,.$$

Mais ce n'est en général pas la seule force entre particules. Par exemple, si deux particules portent des charges q_1 et q_2, elles interagissent par la **force de Coulomb** :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\,.$$

C'est une interaction **attractive** si les charges sont de signes opposés ($q_1 q_2 < 0$) et **répulsive** si les charges sont de même signe ($q_1 q_2 > 0$).

Plus généralement, des particules chargées en mouvement créent un **champ électromagnétique** défini par un **champ électrique** $\vec{E}$ et un **champ magnétique** $\vec{B}$. Une particule de charge q placée dans un tel champ est soumise à la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)\,.$$

2. Forces de rappel

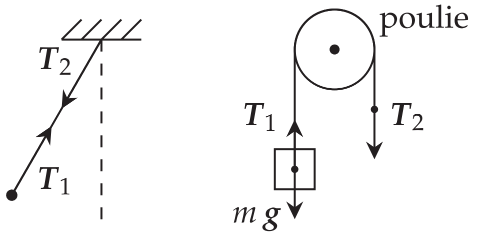
Nous avons déjà vu qu'un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à l'allongement :

$$\left\|\vec{F}\right\| = k\,(\ell - \ell_0)\,, \quad \text{(loi de Hooke)}$$

et dirigée le long du ressort.

Un fil inextensible de masse négligeable exerce aussi une force de rappel dirigée le long du fil. Cette force est appelée **tension**. Son intensité est la même en tout point du fil :

$$\left\|\vec{T}_2\right\| = \left\|\vec{T}_1\right\| .$$



Dans l'exemple de la poulie, la masse monte si $\left\|\vec{T}_2\right\| > mg$ et descend si $\left\|\vec{T}_2\right\| < mg$.

3. Forces de contact avec un solide

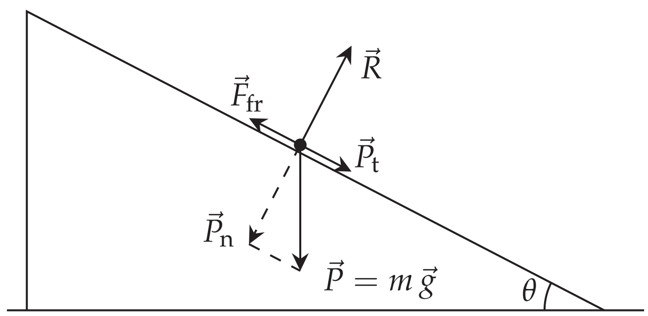
Lorsqu'un objet est en contact avec un support, il subit deux forces :

— la **réaction** $\vec{R}$, qui correspond à la composante perpendiculaire au support et est une forme de force de liaison (voir point suivant) ;

— la **force de frottement** qui s'oppose au mouvement, et qui correspond à la composante tangentielle, elle est souvent notée $\vec{F}_{\text{fr}}$.

Prenons l'exemple d'un plan incliné, et décomposons le poids en une composante normale au plan $\vec{P}_{\text{n}}$ et une composante tangentielle $\vec{P}_{\text{t}}$:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{n}} + \vec{P}_{\text{t}} .$$



La réaction $\vec{R}$ est simplement opposée aux forces normales au support qui attirent l'objet vers le support. Dans le cas du plan incliné, son intensité est donc donnée par

$$\left\|\vec{R}\right\| = mg\cos\theta .$$

La force de frottement dépend des circonstances. Si l'objet est au repos (cas **statique**), elle s'oppose simplement aux forces tangentielles qui agissent sur l'objet. Mais son intensité est limitée :

$$\left\|\vec{F}_{\text{fr}}\right\| \leq \mu_{\text{s}} R ,$$

où μ_{s} est le **coefficient de frottement statique** et $R = \left\|\vec{R}\right\|$ l'intensité de la réaction.

Dans le cas du plan incliné, la force tangentielle est la composante du poids parallèle au plan incliné, d'intensité

$$\left\|\vec{P}_{\text{t}}\right\| = mg\sin\theta .$$

L'objet ne pourra être au repos que si $\vec{F}_{\mathrm{fr}} + \vec{P}_{\mathrm{t}} = 0$. On en déduit que

$$\left\|\vec{F}_{\mathrm{fr}}\right\| = mg\sin\theta\,.$$

Cela n'est possible que si

$$\left\|\vec{F}_{\mathrm{fr}}\right\| = mg\sin\theta \leq \mu_{\mathrm{s}}R = \mu_{\mathrm{s}}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta \leq \mu_{\mathrm{s}}\cos\theta\,,$$

soit donc si

$$\boxed{\tan\theta \leq \mu_{\mathrm{s}}\,.}$$

Cette inégalité permet de mesurer μ_{s}. En effet, si l'on change l'inclinaison du support, l'objet restera immobile tant que $\tan\theta \leq \mu_{\mathrm{s}}$. L'angle θ_{s} pour lequel il décroche permet de déduire μ_{s} puisque pour cet angle

$$\boxed{\mu_{\mathrm{s}} = \tan\theta_{\mathrm{s}}\,.}$$

Si l'objet est en mouvement (cas **dynamique**), il subit une force de frottement dont l'intensité est simplement proportionnelle à la réaction :

$$\left\|\vec{F}_{\mathrm{fr}}\right\| = \mu_{\mathrm{c}}\left\|\vec{R}\right\|\,,$$

où μ_{c} est le **coefficient de frottement cinétique**. En général, $\mu_{\mathrm{c}} < \mu_{\mathrm{s}}$.

Pour mesurer μ_{c}, il suffit de déterminer l'angle θ_{c} pour lequel la vitesse est constante. Dans ce cas, l'accélération tangentielle est nulle, et la force de frottement est juste l'opposée de la composante tangentielle du poids :

$$\left\|\vec{F}_{\mathrm{fr}}\right\| = \mu_{\mathrm{c}}\left\|\vec{R}\right\| = \left\|\vec{P}_{\mathrm{t}}\right\| \quad\Longrightarrow\quad \mu_{\mathrm{c}}mg\cos\theta_{\mathrm{c}} = mg\sin\theta_{\mathrm{c}}\,,$$

donc finalement

$$\boxed{\mu_{\mathrm{c}} = \tan\theta_{\mathrm{c}}\,.}$$

4. Forces de liaison

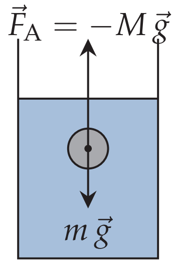
Lorsqu'un point matériel en contact avec son environnement est astreint à se déplacer sur un support (courbe ou surface) sans autre action de l'environnement que cette contrainte, la force qu'il subit est appelée *force de liaison*. Cette force est toujours perpendiculaire au support, et son intensité (la norme du vecteur) n'est pas connue a priori. Cette intensité doit être considérée comme une inconnue du problème. Lorsque l'intensité de cette force s'annule, le point matériel n'est plus soumis à la contrainte et quitte le support (condition de décollement).

Nous avons déjà rencontré des exemples de forces de liaison : la tension d'un fil de masse négligeable, la réaction de l'anneau sur un point matériel astreint à glisser sans frottement. La réaction du support pour des solides en contact est aussi une force de liaison si les frottements sont négligeables.

5. Forces exercées par un fluide

Un objet plongé dans un fluide subit deux forces de la part du fluide.

— La **poussée d'Archimède** : un corps plongé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force opposée à celle à laquelle serait soumis un objet de même volume rempli de fluide. Dans le champ de pesanteur, cette force est verticale ascendante, et d'intensité $\left\|\vec{F}_{\mathrm{A}}\right\| = Mg$, où M est la masse de fluide déplacé.



— Une force de **frottement fluide** : cette force s'annule lorsque la vitesse tend vers 0. On s'attend donc à ce que son intensité soit proportionnelle à v^α, $\alpha > 0$.

Dans le régime dit **laminaire**, lorsque la vitesse n'est pas trop grande, on a

$$\vec{F}_{\mathrm{fr}} = -b_1\,\vec{v}\,.$$

C'est ce que nous avons utilisé pour le mouvement balistique avec frottement.

Dans le régime **turbulent**, qui apparaît lorsque la vitesse est grande, le frottement augmente avec une puissance plus grande. On utilise souvent la forme

$$\vec{F}_{\mathrm{fr}} = -b_{\mathrm{t}} v^2\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\,.$$

II. Impulsion, puissance, travail

Lorsqu'un objet est soumis à une force $\vec{F}(t)$ au cours de son mouvement, il est très utile d'introduire trois quantités associées à cette force.

1. Impulsion

Définition 1 (Impulsion)**.** L'impulsion reçue par un objet entre les instants t_1 et t_2 est définie par

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Son unité est du N s ou encore kg m s^{-1}. Si $\vec{F}$ est indépendante du temps, l'impulsion est simplement proportionnelle à l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{I} = \vec{F}\,\Delta t\,.$$

Proposition. Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel, alors

$$\vec{I}_{12} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \equiv \Delta\vec{p}\,,$$

où $\vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$ est la quantité de mouvement du point matériel.

Démonstration. D'après le principe fondamental,

$$\vec{F}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ainsi,

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Considérons une composante, par exemple p_x :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = p_x(t_2) - p_x(t_1)\,,$$

puisque p_x est une primitive de $\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}$. Il en va de même pour les autres composantes, d'où le résultat annoncé.

Exemple d'application : Si une balle dure et une balle molle de même masse rebondissent sur le sol à la même vitesse, l'impulsion reçue lors du rebond est la même. Mais pour la balle dure, cette impulsion est transmise sur un intervalle de temps beaucoup plus court, et la force est donc beaucoup plus importante.

2. Puissance

Définition 2 (Puissance)**.** La puissance d'une force est définie par le produit scalaire de la force avec la vitesse :

$$P(t) = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,.$$

Elle est mesurée en Watt [W]. C'est une mesure de la quantité d'énergie par unité de temps qu'un système peut recevoir (voir travail ci-dessous).

Exemples.

1. Puissance du poids : $P = m\,\vec{g}\cdot\vec{v}$. La puissance est maximale si le mouvement est vertical ; elle est nulle si le mouvement est horizontal.
2. Puissance de la force de frottement fluide en régime laminaire :

   $$P = -b\,\vec{v}\cdot\vec{v} = -bv^2 < 0\,.$$

   La puissance est négative : une telle force prend de l'énergie au système.

3. Travail

Définition 3 (Travail d'une force)**.** Pour quantifier la quantité d'énergie reçue par un système, il suffit d'intégrer la puissance entre deux instants :

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

$\mathcal{W}$ (*work* en anglais) s'appelle le **travail de la force**.

Proposition. Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel, alors

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\,.$$

Démonstration. D'après le principe fondamental,

$$\vec{F}(t) = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,.$$

D'après la définition, le travail s'écrit donc

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mais $\vec{v}^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}^2(t) = 2\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,v_x + 2\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,v_y + 2\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,v_z = 2\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}(t)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} m\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}^2(t)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}m\left[\vec{v}^2(t)\right]_{t_1}^{t_2}\\ &= \frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2\,.\end{aligned}$$

Au vu de ce résultat, il est utile d'introduire l'**énergie cinétique**.

Définition 4 (Énergie cinétique)**.** L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m à la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2\,.$$

La lettre K est choisie pour le terme *kinetic* en anglais.

Avec cette définition, la proposition précédente peut se reformuler de la façon suivante.

Théorème (Théorème de l'énergie cinétique)**.** Le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique :

$$\mathcal{W}_{12} = K_2 - K_1\,.$$

Le travail et l'énergie se mesurent tous deux en Joule [J], dont la dimension est [N m] ou [kg m^2 s^{-2}].

Puissance et énergie cinétique : d'après ce qui précède, on a

$$\boxed{P(t) = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\,.}$$

La puissance est de ce fait aussi exprimée en [J s^{-1}].

Travail et déplacement : l'expression

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

est tout à fait générale, et elle s'applique même au cas où les composantes de la force dépendant des positions, des vitesses et du temps :

$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2}\left[F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\dot{x}(t) + F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\dot{y}(t) + F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\dot{z}(t)\right]\,\mathrm{d}t\,.$$

Dans le cas très fréquent où la force ne dépend pas des vitesses ni du temps, le travail prend une forme plus simple et plus intuitive :

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,,$$

où $\mathcal{C}$ est le chemin de A à B.

Proposition. En particulier, si la force est uniforme (la même le long du chemin) :

$$\mathcal{W}_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}\,.$$

Démonstration. Puisque la force ne change pas pendant le déplacement, on peut la sortir de l'intégrale et écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{12} &= \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \vec{F} \cdot [\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)] \\
&= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

si $\vec{r}(t_1) = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{r}(t_2) = \overrightarrow{OB}$ puisque $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

III. Forces conservatives, énergie potentielle

Définition 5 (Force conservative et énergie potentielle)**.** Considérons une force $\vec{F}(\vec{r})$ qui ne dépend que de $\vec{r}$. Cette force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi. On peut montrer que cela implique qu'il existe une fonction de l'espace appelée **énergie potentielle** $V(\vec{r})$ telle que

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)\,.$$

Cela implique en particulier que le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul.

Remarque. Comme l'énergie potentielle n'intervient que par sa différence, elle n'est définie qu'à une constante près. On peut donc choisir la valeur de référence $V = 0$ où on veut.

Exemples.

1. Le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ est uniforme. Ainsi, le travail est donné par

   $$\mathcal{W}_{AB} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}\,.$$

   Il ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc il ne dépend pas du chemin suivi. Si on pose $\vec{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$, on a :

   $$\mathcal{W}_{AB} = -m\,g\,\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB} = -m\,g\,(z_B - z_A) = m\,g\,z_A - m\,g\,z_B\,.$$

   Cela suggère de choisir comme énergie potentielle du poids :

   $$V(\vec{r}) = m\,g\,z\,.$$

2. Les forces de frottement ne sont pas conservatives. En effet, la puissance est strictement négative, comme nous l'avons vu dans le cas du frottement

fluide dans le régime laminaire :

$$\vec{F} = -b\,\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad P = -bv^2 < 0\,.$$

Ainsi, le travail d'une force de frottement est strictement négatif, et il ne peut pas s'annuler le long d'une boucle.

3. **Force de rappel** : dans le cas de la force de rappel d'un ressort, on a vu qu'elle s'exprimait comme
$$F_z = -kz$$
si l'on prend $z = 0$ comme la position d'équilibre. Si le mouvement est vertical, $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$, et la puissance est donnée par
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -kz\dot{z} = -\frac{k}{2}\frac{\mathrm{d}\left(z^2\right)}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$
Le travail est donc donné par :
$$\mathcal{W}_{12} = -\frac{k}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\left(z^2\right)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{k}{2}[z(t_2)^2 - z(t_1)^2] = \frac{k}{2}z(t_1)^2 - \frac{k}{2}z(t_2)^2\,.$$
On peut donc choisir comme potentiel $V(z) = \frac{1}{2}kz^2$.

4. **Force centrale** : la force exercée par une particule sur une autre du fait de la gravitation ou de la force de Coulomb est de la forme
$$\vec{F} = -\frac{C}{r^2}\,\vec{e}_r\,,$$
où l'on a pris comme origine la particule qui exerce une force sur l'autre. La constante C est positive pour la gravitation, mais elle peut être positive ou négative pour la force de Coulomb.

   Or, en coordonnées sphériques, la vitesse est donnée par
$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi\,.$$
Ainsi, la puissance est donnée par
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{C}{r^2}\,\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{C}{r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{C}{r}\right)\,.$$
Le travail est donc donné par
$$\mathcal{W}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{C}{r}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{C}{r_2} - \frac{C}{r_1}\,.$$
Or, par définition de l'énergie potentielle, $\mathcal{W}_{12} = V_1 - V_2$, d'où l'on déduit
$$\boxed{V(\vec{r}) = -\frac{C}{r}\,.}$$
Cette énergie potentielle ne dépend que de r. C'est un résultat général pour toute force centrale, c'est-à-dire pour toute force dirigée vers un même point et dont l'intensité ne dépend que de la distance à ce point.

Théorème (Théorème de l'énergie mécanique)**.** Pour une force conservative, l'**énergie mécanique** définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est conservée :

$$E = V + K = \text{cte}.$$

Preuve. Nous avons vu que, de façon tout à fait générale,

$$\mathcal{W}_{12} = K_2 - K_1\,.$$

Or, pour une force conservative, on a aussi

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2\,.$$

On en déduit donc que

$$K_2 - K_1 = V_1 - V_2 \quad\Longrightarrow\quad V_1 + K_1 = V_2 + K_2\,.$$

L'énergie mécanique est un exemple d'**intégrale première**, c'est-à-dire d'une quantité conservée au cours du temps. Ces intégrales premières sont très utiles car elles correspondent à avoir intégré une fois les équations du mouvement. Elles ne font intervenir que les dérivées premières.

Exemples.

1. **Le champ de pesanteur** : Pour un mouvement vertical, le théorème de l'énergie mécanique mène à

$$mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \text{cte}.$$

Si l'on dérive cette équation par rapport au temps, il vient

$$mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = 0\,.$$

En divisant par $\dot{z}$, on obtient

$$m\ddot{z} = -mg\,,$$

et l'on retrouve le principe fondamental.

2. **Force de rappel** : dans le cas de la force de rappel, le théorème de l'énergie cinétique conduit à

$$\frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \text{cte} \quad\Longrightarrow\quad m\dot{z}\ddot{z} = -k\dot{z}z \quad\Longrightarrow\quad m\ddot{z} = -kz\,.$$

Le théorème de l'énergie mécanique permet de répondre de façon très économique à des questions faisant intervenir la vitesse.

Exemple. On laisse tomber un objet d'une hauteur h sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse lors de l'impact ?
Réponse : on a

$$mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E\,,$$

où E est donc une constante. À $t = 0$, $z = h$ et $\dot{z} = 0$, donc $E = mgh$. Au moment de l'impact, $z = 0$, donc

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 = mgh \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\dot{z} = \sqrt{2gh}\,.}$$

Définition (Gradient). Le gradient d'une fonction f est défini par

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} ,$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ est appelé **gradient** ou *nabla*, et où le symbole $\frac{\partial f}{\partial x}$ désigne la **dérivée partielle** de la fonction f par rapport à la coordonnée x définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\vec{r} + \varepsilon\, \vec{e}_x) - f(\vec{r})}{\varepsilon} \tag{2}$$

Proposition. Si une force est conservative, alors elle est reliée à l'énergie potentielle par

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \,.$$

On dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(\vec{r})$ (où, par abus de langage, on parle souvent de **potentiel** pour l'énergie potentielle).

Justification. Considérons le travail entre 2 points $\vec{r}$ et $\vec{r} + \varepsilon\, \vec{e}_x$. Si ε est suffisamment petit, la force $\vec{F}$ peut être considérée comme constante, et son travail est donné par

$$W = \vec{F} \cdot \varepsilon\, \vec{e}_x = \varepsilon\, F_x. \tag{3}$$

et donc, quand $\varepsilon \to 0$, $W/\varepsilon \to F_x$. Mais, par définition de l'énergie potentielle, ce travail est donné par

$$W = V(\vec{r}) - V(\vec{r} + \varepsilon\, \vec{e}_x) \tag{4}$$

D'après la définition de la dérivée partielle, $W/\varepsilon \to -\frac{\partial V}{\partial x}$ quand $\varepsilon \to 0$. On en déduit que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \,. \tag{5}$$

Complément (Rotationnel). Pour savoir si une force est conservative, il est utile de considérer son rotationnel.

Définition (Rotationnel). Le rotationnel d'un vecteur $\vec{f}$ est défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

Proposition. Si $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative, son **rotationnel** est nul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} \,.$$

Preuve. Nous avons

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0\,,$$

car pour toute fonction de deux variables,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,.$$

Idem pour les autres composantes.

Remarque. On peut démontrer que toutes ces propriétés sont équivalentes, c'est-à-dire qu'une force $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes.

— Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que

$$\mathcal{W}_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)\,.$$

— Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})\,.$$

— Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi.

— Le travail de $\vec{F}$ est nul pour une trajectoire fermée.

— $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$.

IV. Équilibres stables et instables

Lorsqu'un système est soumis à des forces conservatives, l'énergie potentielle permet une discussion très intéressante de la notion d'équilibre et de la stabilité des points d'équilibre.

Considérons l'exemple d'un point matériel se déplaçant dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. Le point matériel est soumis à une force $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -V'(x)\,\vec{e}_x$. Il sera immobile si et seulement si la force qui s'exerce sur lui est nulle, c'est-à-dire si

$$V'(x) = 0\,.$$

C'est la condition de l'**équilibre** du point matériel.

Définition (Point d'équilibre)**.** Les points d'équilibre d'un point matériel correspondent aux *minima* et aux *maxima* du potentiel.

Soit x_0 un point d'équilibre, donc un point tel que $V'(x_0) = 0$. Essayons d'évaluer la force pour un x proche de x_0. On peut écrire

$$\vec{F} = -V'(x)\,\vec{e}_x\,,$$

mais, comme x est supposé proche de x_0, on peut faire un développement limité autour de x_0 :

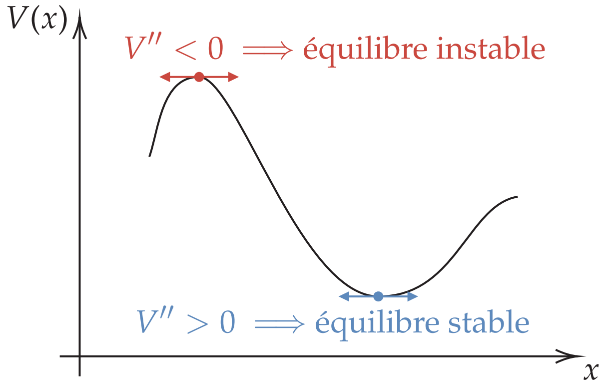
$$\begin{aligned} V'(x) &= V'(x_0) + V''(x_0)\,(x - x_0) + \ldots \\ &= V''(x_0)\,(x - x_0) + \ldots \end{aligned}$$

puisque $V'(x_0) = 0$.

Ainsi, $\vec{F} = -V''(x_0)\,(x - x_0)\ \vec{e}_x$. Deux cas de figure se présentent.

1. $V''(x_0) > 0$. La force tend à ramener x vers x_0. C'est une force de rappel. On dit que l'équilibre est **stable**.
2. $V''(x_0) < 0$. La force tend à éloigner le point matériel de la position d'équilibre. On dit que l'équilibre est **instable**.

Les deux cas de figure sont résumés sur le graphique suivant.



Le concept d'énergie potentielle permet d'éclairer la nature du mouvement autour d'une position d'équilibre stable. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique,

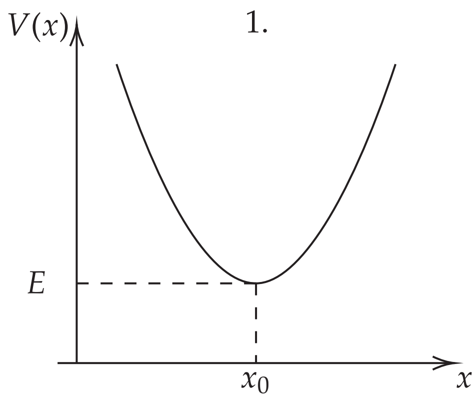
$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) = E\,,$$

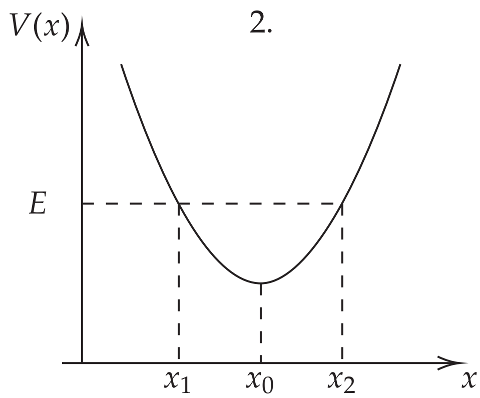
où E, l'énergie du système, est une constante. Cette équation ne peut être satisfaite que si $V(x) \leq E$. Deux cas de figure se présentent.

1. $V(x_0) = E$. Dans ce cas, la vitesse est nulle, et c'est un point d'équilibre. On retrouve le fait qu'un minimum de V correspond à un point d'équilibre.
2. $E > V(x_0)$. Dans ce cas, le point matériel va osciller entre les points x_1 et x_2 définis par

$$V(x_1) = E \quad \text{et} \quad V(x_2) = E \quad \text{avec} \quad x_1 < x_0 < x_2\,.$$

   En effet, quand le point matériel atteint x_1 ou x_2, l'énergie cinétique s'annule, et la force de rappel ramène le point matériel vers x_0.





Pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre, la force de rappel $\vec{F} = -V''(x_0)\,(x - x_0)\ \vec{e}_x$ est simplement proportionnelle à la distance au point d'équilibre. Les équations du mouvement sont donc les mêmes que pour un ressort de raideur $k = V''(x_0)$, et la période des oscillations est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}\,.$$

Complément (Solution générale). Plus généralement, la période peut s'exprimer simplement en fonction de $V(x)$. En effet, la conservation de l'énergie mécanique conduit à

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}\,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = \mathrm{d}t\,,$$

et finalement

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, = t_2 - t_1 .$$

Remarque. Alternativement, cette équation peut se réécrire

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} = 1\,.$$

Soit $F(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$, c'est-à-dire une fonction telle que

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}\,.$$

Le membre de gauche est donné par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F'(x)\dot{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}\,.$$

Du coup,

$$F(x_2) - F(x_1) = t_2 - t_1\,, \quad \text{soit} \quad \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,\mathrm{d}x = t_2 - t_1\,,$$

d'où

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}\,.$$

La période est égale au double du temps pour aller de x_1 à x_2, soit :

$$\boxed{T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}}}\,.$$

Dans le cas des petites oscillations, on peut limiter le développement de $V(x)$ au deuxième ordre :

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)\,(x - x_0)^2\,.$$

Dans ce cas, on sait que la période est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}\,,$$

puisque l'équation est la même que pour un ressort de raideur $k = V''(x_0)$. Ce résultat peut se retrouver aisément via la formule générale. Posons en effet $x_0 = 0$, $V(x_0 = 0)$. Comme le mouvement est symétrique pour les oscillations harmoniques,

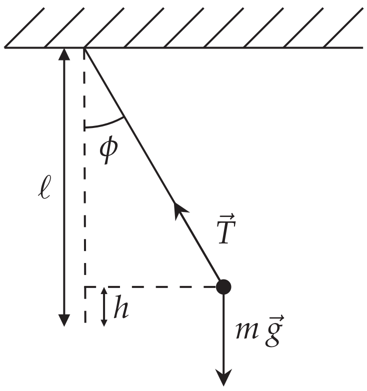
$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}}$$

avec $V(x) = \frac{1}{2}V''x^2$ et $E = \frac{1}{2}V''x_1^2$, d'où

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2m} \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{V''}{2}}\sqrt{x_1^2 - x^2}} \\ &= 2\sqrt{2m}\sqrt{\frac{2}{V''}} \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_1^2 - x^2}} \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{V''}} \underbrace{\left[\arcsin \frac{x}{x_1}\right]_0^{x_1}}_{=\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''}} . \end{aligned}$$

Exemple. Considérons de nouveau le pendule simple. Comme la tension est le long du fil, donc perpendiculaire à la vitesse, elle ne travaille pas, et la seule source d'énergie potentielle est le poids :

$$V = mgh .$$



L'énergie cinétique est donnée par $\frac{1}{2}mv^2$ avec [a]

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{z}\,\vec{e}_z .$$

Comme $\rho = \ell = \text{cte}$, $\vec{v} = \ell\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi$, et l'énergie cinétique est donnée par

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 .$$

Pour l'énergie potentielle, on peut l'exprimer en fonction de ϕ en prenant comme référence $V(\phi = 0) = 0$. Ainsi, $z = h = \ell - \ell\cos\phi = \ell(1 - \cos\phi)$, et il vient :

$$V(\phi) = mg\ell\left(1 - \cos\phi\right) .$$

Les positions d'équilibre sont données par

$$V'(\phi) = 0 \quad\Longrightarrow\quad mg\sin\phi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \phi = 0 \text{ ou } \pi .$$

Par ailleurs, comme $V''(\phi) = mg\cos\phi$, on a :

$V''(\phi = 0) > 0$ donc $\phi = 0$ est un équilibre stable ;

$V''(\phi = \pi) < 0$ donc $\phi = \pi$ est un équilibre instable.

La période des oscillations autour de la position d'équilibre s'obtient en suivant le même raisonnement que précédemment :

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 + mg\ell\left(1 - \cos\phi\right) = E\,.$$

Pour un mouvement d'amplitude ϕ_1, $E = mg\ell\left(1 - \cos\phi_1\right)$ et

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2mg\ell}{m\ell^2}\left(\cos\phi - \cos\phi_1\right) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_1}\,,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_1}} = \mathrm{d}t\,.$$

La période est égale à 4 fois le temps pour aller de $\phi = 0$ à $\phi = \phi_1$, d'où :

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\phi_1}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_1}}\,.$$

C'est une intégrale dite intégrale elliptique de première espèce qui n'a pas de solution compacte simple. Le résultat dépend de ϕ_1, et pour ϕ_1 petit il prend la forme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\phi_1^2}{16} + \ldots\right)\,.$$

On retrouve le résultat $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ pour les petites oscillations, mais la période dépend de l'amplitude des oscillations, contrairement au cas du ressort.

a. Attention : on est en coordonnées cylindriques et z est perpendiculaire au plan du pendule donc $\dot{z} = 0$.

Remarque. S'il n'est pas possible de définir une énergie potentielle, on peut toujours discuter les positions d'équilibre et leur stabilité en vérifiant que la variable qui définit l'équilibre satisfait une équation différentielle du type $\ddot{x} = -\alpha x$. Si $\alpha < 0$, l'équilibre est instable. Si $\alpha > 0$, l'équilibre est stable, et le mouvement est périodique de fréquence $\omega = \sqrt{\alpha}$.

V. Frottements et théorème de l'énergie

Supposons qu'un système soit soumis à des forces conservatives et des forces non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$K_2 - K_1 = \mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{12}^{C} + \mathcal{W}_{12}^{NC}\,,$$

où $\mathcal{W}_{12}^{C}$ est le travail des forces conservatives et $\mathcal{W}_{12}^{NC}$ le travail des forces non conservatives.

Or, le travail des forces conservatives s'exprime à l'aide d'une énergie potentielle :

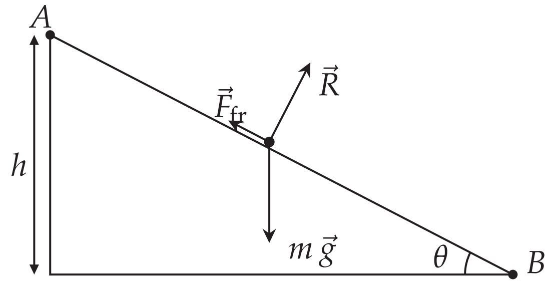
$$\mathcal{W}_{12}^{C} = V_1 - V_2 \quad \Longrightarrow \quad K_2 + V_2 - K_1 - V_1 = \mathcal{W}_{12}^{NC}\,,$$

soit donc

$$\boxed{E_2 - E_1 = \mathcal{W}_{12}^{\mathrm{NC}}\,.}$$

La variation d'énergie mécanique $E = K + V$ est égale au travail des forces non conservatives.

Exemple. Un lugeur part d'une hauteur h sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. On se propose de trouver sa vitesse finale v en fonction du coefficient de frottement μ_{c}.



On a déjà vu que $\left\|\vec{R}\right\| = mg\cos\theta$, et donc que $\left\|\vec{F}_{\mathrm{fr}}\right\| = mg\mu_{\mathrm{c}}\cos\theta$. L'intensité et la direction de $\vec{F}_{\mathrm{fr}}$ sont constantes pour ce parcours, et donc

$$\mathcal{W}^{\mathrm{fr}} = \vec{F}_{\mathrm{fr}} \cdot \overrightarrow{AB} = -mg\cos\theta\,\frac{h}{\sin\theta}\,\mu_{\mathrm{c}} = -mg\frac{h}{\tan\theta}\,\mu_{\mathrm{c}}\,.$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle est donnée par $V = mgh$ au départ et 0 à l'arrivée.

Finalement, $K_A = 0$, $K_B = \frac{1}{2}mv^2$, $V_A = mgh$ et $V_B = 0$ donc

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = -mg\,\frac{h}{\tan\theta}\,\mu_{\mathrm{c}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh\left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{c}}}{\tan\theta}\right),$$

d'où finalement

$$\boxed{v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{c}}}{\tan\theta}\right)}\,.}$$

Remarques.

1. En l'absence de frottements ($\mu_{\mathrm{c}} = 0$), on retrouve $v = \sqrt{2gh}$.
2. Les frottements diminuent la vitesse finale.
3. La condition $1 - \dfrac{\mu_{\mathrm{c}}}{\tan\theta} > 0$ est équivalente à

$$\tan\theta > \mu_{\mathrm{c}}\,.$$

   Or, pour que le mouvement démarre, il faut que $\tan\theta > \mu_{\mathrm{s}}$, où μ_{s} est le coefficient de frottement statique, et on a de façon générale $\mu_{\mathrm{s}} > \mu_{\mathrm{c}}$. Donc la condition $\tan\theta > \mu_{\mathrm{c}}$ est bien vérifiée.