

Oscillateur harmonique

« Dès lors mon âme en branle n'a plus fait que passer par la ligne du repos, et ses oscillations toujours renouvelées ne lui ont jamais permis d'y rester. »

— Jean-Jacques Rousseau

Le principe fondamental de la dynamique s'applique à des situations beaucoup plus générales que le mouvement des objets dans le champ de pesanteur. L'un des problèmes qui trouve le plus grand nombre d'applications en physique est celui de l'**oscillateur harmonique**, un modèle qui décrit les petites oscillations de toute sorte de système autour de sa position d'équilibre. L'exemple le plus simple est celui d'une masse attachée à un ressort.

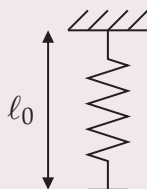
I. Ressort, loi de Hooke

Considérons un ressort de longueur au repos ℓ_0 . Si l'on tire sur le ressort, ou si on le comprime, le ressort va exercer une force qui s'oppose à la déformation. La loi de Hooke, vérifiée empiriquement, donne des informations sur cette déformation.

Loi (Loi de Hooke). La loi de Hooke stipule que, tant que la déformation n'est pas trop grande, la force est proportionnelle à l'allongement ou à la contraction du ressort :

$$\|\vec{F}\| = k |\ell - \ell_0| ,$$

où k est la raideur du ressort.



Si l'on choisit un axe z orienté selon le ressort et pointant vers le haut pour un ressort suspendu à un support, on a donc :

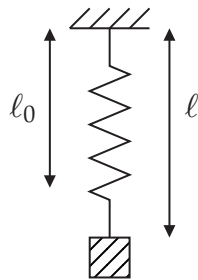
$$F_z = k(\ell - \ell_0) .$$

En effet, si $\ell > \ell_0$, le ressort exerce une force de rappel, donc positive si l'orientation est dans le sens du ressort.

1. Position d'équilibre

Considérons désormais le cas où une masse m est attachée au ressort. Si l'extension du ressort est égale à ℓ , la masse est soumise à la somme de son poids et de la force de rappel :

$$F_z = -mg + k(\ell - \ell_0) .$$



À l'équilibre, cette force s'annule :

$$mg = k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) ,$$

d'où l'on tire

$$\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{m}{k}g .$$

2. Petites oscillations

Choisissons un repère dont l'origine est à la position d'équilibre, avec l'axe z toujours orienté vers le haut. La longueur du ressort est donnée par $\ell = \ell_{\text{éq}} - z$, et la force totale s'écrit :

$$\begin{aligned} F_z &= -mg + k(\ell - \ell_0) \\ &= -mg + k(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0) \\ &= -kz \end{aligned}$$

puisque $mg = k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)$.

Ainsi, le mouvement de la masse est régi par l'équation différentielle

$$m\ddot{z} = -kz .$$

Dans ce genre de problème, il est usuel de mettre du même côté tous les termes qui dépendent de la fonction inconnue, et cette équation est habituellement écrite :

$$m\ddot{z} + kz = 0 .$$

C'est une équation que nous n'avons pas encore rencontrée¹. Il existe une méthode systématique de résolution d'une équation du type

$$\ddot{z} + f(z) = 0$$

et nous y reviendrons plus tard dans ce cours, mais dans le cas $f(z) = az$, la solution est tellement simple que l'on peut se passer de la solution générale. Il suffit en effet de chercher une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée seconde. Mais il y a deux exemples bien connus :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \cos(at) = -a \sin(at) \\ \frac{d}{dt} \sin(at) = a \cos(at) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \cos(at) = -a^2 \cos(at) \\ \frac{d^2}{dt^2} \sin(at) = -a^2 \sin(at) \end{cases} .$$

1. La résistance de l'air introduit un terme proportionnel à \dot{z} , pas à z .

Cherchons donc la solution de

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

sous la forme² $z = \cos(\omega t)$:

$$-\omega^2 m \cos(\omega t) + k \cos(\omega t) = 0 \implies (k - \omega^2 m) \cos(\omega t) = 0.$$

Cette équation est satisfaite pour tout temps t si $k - \omega^2 m = 0$, soit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On vérifie aisément que $\sin(\omega t)$ est aussi solution. Par ailleurs, on peut multiplier $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ par des constantes arbitraires. La solution générale peut donc s'écrire

$$z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Les constantes A et B sont ajustées, comme d'habitude, avec les conditions initiales. Supposons par exemple que l'on parte à l'instant $t = 0$ en déplaçant la masse d'une distance d vers le bas, et qu'on la lâche sans vitesse initiale :

$$\begin{cases} z(t=0) = -d \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -d \\ -A\omega \sin(\omega \times 0) + B\omega = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -d \\ B = 0 \end{cases}.$$

La solution est un simple mouvement d'oscillation :

$$z(t) = -d \cos(\omega t).$$

De telles oscillations qui font intervenir une seule fréquence sont dites **harmoniques**.

On écrit aussi parfois la solution sous la forme d'une seule fonction trigonométrique avec un déphasage φ :

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi).$$

En développant le cosinus, on peut relier C et φ à A et B :

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \implies \begin{cases} C \cos \varphi = A \\ -C \sin \varphi = B \end{cases}$$

qui a pour solution $C = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \varphi = -B/A$. Avec cette forme, le problème précédent conduit à

$$\begin{cases} C \cos \varphi = -d \\ -\omega C \sin \varphi = 0 \end{cases}.$$

On peut choisir $\varphi = 0$ et $C = -d$, ce qui conduit à la même solution, ou $\varphi = \pi$ et $C = d$, ce qui revient au même puisque $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$.

Définition (Période). La période des oscillations est le temps T que met le système à revenir à la même position.

2. La notation ω est conventionnelle pour une fréquence, dont la dimension est l'inverse d'un temps.

Autrement dit, on cherche T telle que

$$\cos[\omega(t+T)] = \cos(\omega t) \implies \cos(\omega t + \omega T) = \cos(\omega t) \quad \forall t.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\omega T = 2\pi n$, n entier. La plus petite solution non nulle est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ainsi, la période des oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Cette période dépend de m et de k mais **pas** de l'amplitude C des oscillations.

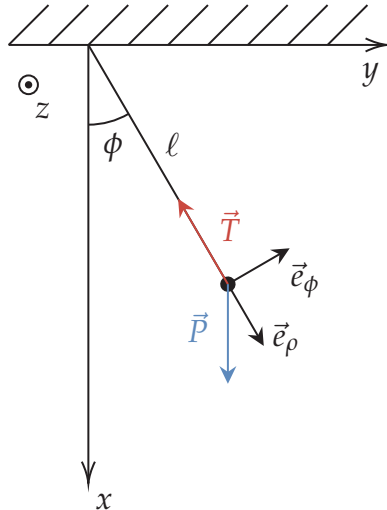
II. Le pendule

Un autre exemple d'oscillateur est celui d'un pendule contraint à osciller dans un plan vertical perpendiculaire à z . L'équation du mouvement a déjà été établie dans le chapitre précédent comme exemple d'utilisation des coordonnées cylindriques définies sur la figure. Pour rappel, l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = -l\dot{\phi}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\phi} \vec{e}_\phi,$$

et le pendule est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_x$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.



Si on projette l'équation du mouvement sur \vec{e}_ϕ , la tension, qui est inconnue, disparaît, et il vient :

$$\begin{aligned} mg \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi}_{-\sin \phi} &= ml\ddot{\phi} \\ -mg \sin \phi &= ml\ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle qui ne possède pas de solution simple. Par contre, si l'on se limite aux petites oscillations, on peut faire l'approximation

$$\sin \phi \simeq \phi,$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0.$$

Cette équation a la même forme que celle du ressort, et la solution générale est de la forme

$$\phi = A \cos(\omega t + \varphi),$$

ou A et φ sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales, et

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{soit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

C'est un mouvement périodique de fréquence $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ **indépendante de m** . La période est égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

On peut alors projeter la deuxième loi sur \vec{e}_r pour en déduire la tension du fil :

$$\begin{aligned} m \vec{a} \cdot \vec{e}_r &= -T + mg \cos \phi \\ T &= m l \dot{\phi}^2 + mg \cos \phi, \end{aligned}$$

ou encore, comme fonction du temps,

$$T(t) = m l A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + mg \cos[A \cos(\omega t + \varphi)].$$

On peut aisément en déduire les valeurs extrémales de la tension en dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= m l A^2 \omega^2 2 \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) \\ &\quad - mg \sin[A \cos(\omega t + \varphi)] [-A \omega \sin(\omega t + \varphi)]. \end{aligned}$$

La dérivée s'annule si $\sin(\omega t + \varphi) = 0$, soit $\phi = A$, l'angle maximum, ou encore si $\cos(\omega t + \varphi) = 0$, soit $\phi = 0$. Lorsque $\phi = 0$, la tension vaut $T = m l A^2 \omega^2 + mg$, alors que pour l'angle maximum $\phi = A$ elle vaut $T = mg \cos A$. Comme $mg \cos A < m l A^2 \omega^2 + mg$, on en déduit que la tension est maximale pour $\phi = 0$. Lorsque le pendule est immobile, $A = 0$, et on retrouve que la tension du fil en $\phi = 0$ est donnée par $T = mg$, comme il se doit.

III. Oscillations amorties

Dans un traitement plus réaliste des oscillations d'une masse attachée à un ressort, il faut prendre en compte des forces qui vont progressivement amortir ce mouvement. L'une d'elle est la force de frottement due à la résistance de l'air $\vec{F}_r = -b \vec{v}$. Si l'on prend cette force en compte, l'équation différentielle en z devient

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0.$$

Pour trouver une solution, l'idéal serait que la dérivée première **et** la dérivée seconde de z soient proportionnelles à z . Mais nous connaissons une telle fonction :

$$\frac{d}{dt} \exp(\gamma t) = \gamma \exp(\gamma t) \implies \frac{d^2}{dt^2} \exp(\gamma t) = \gamma^2 \exp(\gamma t).$$

Cherchons donc une solution de la forme $z(t) = \exp(\gamma t) (= e^{\gamma t})$:

$$m\gamma^2 e^{\gamma t} + b\gamma e^{\gamma t} + k e^{\gamma t} = 0 \implies e^{\gamma t} (m\gamma^2 + b\gamma + k) = 0,$$

qui est vrai à chaque instant t si

$$m\gamma^2 + b\gamma + k = 0.$$

γ doit donc être solution d'une équation du second degré. Son discriminant est donné par

$$\Delta = b^2 - 4km.$$

Il peut être positif ou négatif. Il faut donc envisager plusieurs cas de figure.

1. Régime supercritique

$$\Delta = b^2 - 4km > 0$$

Dans ce cas, il y a deux solutions réelles données par

$$\gamma_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

Notons que, puisque $b > 0$, les solutions sont négatives :

$$\gamma_2 < \gamma_1 < 0.$$

La solution générale est donc de la forme

$$z(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}.$$

Avec les conditions initiales habituelles ($z(t=0) = -d$, $\dot{z}(t=0) = 0$), il vient :

$$\begin{cases} A + B = -d \\ A\gamma_1 + B\gamma_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{d}{1 - \gamma_1/\gamma_2} \\ B = -\frac{d}{1 - \gamma_2/\gamma_1} \end{cases}.$$

La solution est la somme de deux exponentielles décroissantes. Elle tend vers 0 à la limite $t \rightarrow +\infty$. C'est le régime fortement amorti, dit **supercritique**. La décroissance est dominée par $e^{\gamma_1 t}$ aux temps longs.

2. Régime critique

$$\Delta = b^2 - 4km = 0$$

Dans ce cas, l'équation en γ a une racine double $\gamma = -\frac{b}{2m}$, et la solution générale est de la forme :

$$z(t) = (A + Bt) e^{\gamma t}$$

$z(t)$ tend aussi vers 0 de façon monotone quand $t \rightarrow +\infty$, mais moins vite. C'est le régime dit **critique**.

Justification. $z(t) = e^{\gamma t}$ est solution d'après ce qui précède. Démontrons que $z(t) = te^{\gamma t}$ est aussi solution.

$$\begin{aligned} z(t) &= te^{\gamma t} \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= e^{\gamma t} + \gamma te^{\gamma t} \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t} + \gamma e^{\gamma t} + \gamma^2 te^{\gamma t} = 2\gamma e^{\gamma t} + \gamma^2 te^{\gamma t} \end{aligned}$$

d'où

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = te^{\gamma t} \underbrace{(m\gamma^2 + b\gamma + k)}_{=0} + e^{\gamma t} \underbrace{(2m\gamma + b)}_{=0} = 0.$$

Complément (Preuve). Comme dans ce cas l'équation a une racine double $\gamma = -\frac{b}{2m}$, on pourrait être tenté d'en déduire que la solution générale est de la forme $z(t) = Ae^{\gamma t}$, mais ce n'est pas possible : comme on peut fixer indépendamment la position initiale et la vitesse initiale, il faut deux constantes d'intégration. Cela suggère que si l'on cherche la solution sous la forme

$$z(t) = e^{\gamma t}u(t),$$

la solution la plus générale pour $u(t)$ n'est pas $u(t) = \text{cte}$. Écrivons l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$. Comme

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t}u(t) + e^{\gamma t}\dot{u}(t) \\ \ddot{z}(t) &= \gamma^2 e^{\gamma t}u(t) + \gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + \gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + e^{\gamma t}\ddot{u}(t) \\ &= \gamma^2 e^{\gamma t}u(t) + 2\gamma e^{\gamma t}\dot{u}(t) + e^{\gamma t}\ddot{u}(t), \end{aligned}$$

l'équation différentielle pour $u(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} m(\gamma^2 e^{\gamma t}u + 2\gamma e^{\gamma t}\dot{u} + e^{\gamma t}\ddot{u}) + b(\gamma e^{\gamma t}u + e^{\gamma t}\dot{u}) + ke^{\gamma t}u &= 0 \\ \implies e^{\gamma t} [m\ddot{u} + (b + 2\gamma m)\dot{u} + (m\gamma^2 + b\gamma + k)u] &= 0. \end{aligned}$$

Mais $m\gamma^2 + b\gamma + k = 0$ puisque γ est solution de l'équation du second degré, et $\gamma = -\frac{b}{2m}$ pour $\Delta = 0$, ce qui implique que le coefficient de \dot{u} , $(b + 2\gamma m)$, est aussi égal à 0. L'équation différentielle en u se réduit donc à

$$me^{\gamma t}\ddot{u} = 0 \implies \ddot{u} = 0$$

dont la solution générale est de la forme $u = A + Bt$.

Ainsi, la solution générale lorsque $b^2 - 4km = 0$ est de la forme

$$\boxed{z(t) = (A + Bt)e^{\gamma t}}, \quad \gamma = -\frac{b}{2m}.$$

3. Régime sous-critique

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4km < 0}$$

Dans ce cas, la solution générale est de la forme

$$\boxed{z(t) = e^{\gamma t} (\tilde{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B} \sin(\tilde{\omega}t))},$$

ou encore, comme vu précédemment,

$$\boxed{z(t) = e^{\gamma t} C \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)}.$$

avec $\gamma = -\frac{b}{2m}$ et $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il s'agit d'oscillations amorties. C'est le régime dit **sous-critique**.

Justification. Démontrons que $z(t) = e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t)$ est solution.

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t) \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= \gamma e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t) - \tilde{\omega} e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega}t) \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= \gamma^2 e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t) - \gamma e^{\gamma t} \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t) - \gamma e^{\gamma t} \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}t) - \tilde{\omega}^2 e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t) \end{aligned}$$

d'où

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = e^{\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t) (m\gamma^2 - m\tilde{\omega}^2 + b\gamma + k) + e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega}t) (-b\tilde{\omega} - 2m\gamma\tilde{\omega}) = 0.$$

puisque

$$m\gamma^2 - m\tilde{\omega}^2 + b\gamma + k = m\gamma^2 - m \underbrace{\omega_0^2}_{k/m} + m\gamma^2 + b\gamma + k = \gamma \underbrace{(2m\gamma + b)}_{=0} = 0.$$

et

$$-b\tilde{\omega} - 2m\gamma\tilde{\omega} = -\tilde{\omega} \underbrace{(b + 2m\gamma)}_{=0} = 0.$$

On démontre de même aisément que $z(t) = e^{\gamma t} \sin(\tilde{\omega}t)$ est solution.

Complément (Preuve). Dans ce cas, l'équation du second degré a deux racines complexes données par

$$\gamma_+ = \frac{-b + i\sqrt{4km - b^2}}{2m} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \frac{-b - i\sqrt{4km - b^2}}{2m}.$$

Ces deux racines sont complexes conjuguées, ce qui est normal puisque leur somme, $-\frac{b}{m}$, est réelle. Écrivons ces racines

$$\gamma_+ = \gamma + i\tilde{\omega} \quad \text{et} \quad \gamma_- = \gamma - i\tilde{\omega},$$

avec

$$\gamma = -\frac{b}{2m} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m},$$

ou encore $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la fréquence de l'oscillateur non amorti.

La solution générale dans \mathbb{C} est de la forme

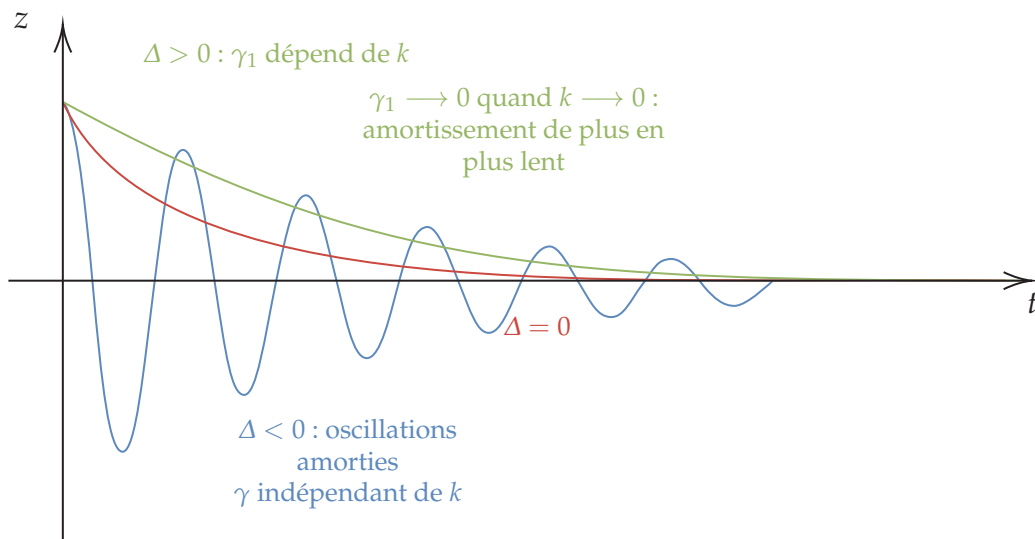
$$z(t) = e^{\gamma t} (A e^{i\tilde{\omega}t} + B e^{-i\tilde{\omega}t}), \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Pour trouver des solutions réelles, il suffit de prendre la partie réelle de cette solution. Posons $A = A_1 + iA_2$ et $B = B_1 + iB_2$.

$$\begin{aligned} \Re(A e^{i\tilde{\omega}t} + B e^{-i\tilde{\omega}t}) &= A_1 \cos(\tilde{\omega}t) - A_2 \sin(\tilde{\omega}t) + B_1 \cos(\tilde{\omega}t) + B_2 \sin(\tilde{\omega}t) \\ &= (A_1 + B_1) \cos(\tilde{\omega}t) + (B_2 - A_2) \sin(\tilde{\omega}t). \end{aligned}$$

Puisque A_1, B_1, A_2 et B_2 sont quelconques, cela signifie que la solution réelle la plus générale est de la forme

$$z(t) = e^{\gamma t} (\tilde{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B} \sin(\tilde{\omega}t)).$$



IV. Oscillations forcées, résonance

Si l'on veut forcer un oscillateur à osciller à une certaine fréquence sans amortissement, on peut y parvenir en le soumettant à une force dépendant du temps de façon harmonique :

$$f \cos(\omega t),$$

où ω est une fréquence arbitraire. L'équation différentielle prend la forme

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = f \cos(\omega t).$$

La solution générale est la somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière. Nous connaissons déjà la forme de la solution générale de l'équation sans second membre, et dès que $b > 0$, cette solution décroît exponentiellement vite (avec ou sans oscillations).

On peut démontrer que l'équation avec second membre possède une solution particulière de la forme :

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec

$$C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

où, comme précédemment, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\gamma = \frac{b}{2m}$.

Complément (Preuve). Pour trouver une solution de l'équation avec second membre, on remarque que si l'on prend une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, le membre de gauche sera encore une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, et en annulant le coefficient de $\sin(\omega t)$, on pourra satisfaire l'équation. Posons donc

$$\begin{aligned} z(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \dot{z}(t) &= -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{z}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

L'équation différentielle conduit à

$$\begin{aligned} m(-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)) + b(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) \\ + k(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = f \cos(\omega t) \end{aligned}$$

soit donc

$$\cos(\omega t) [-mA\omega^2 + bB\omega + kA - f] + \sin(\omega t) [-mB\omega^2 - bA\omega + kB] = 0.$$

Cette équation sera satisfaite dès que

$$\begin{cases} (k - m\omega^2) A + b\omega B = f \\ -b\omega A + (k - m\omega^2) B = 0 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est égal à $\text{Det} = (k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2$. Il est strictement positif dès que $b \neq 0$ ou que $k - m\omega^2 \neq 0$. Si l'une au moins de ces conditions est satisfaite, il y a une solution unique en A et B donnée par :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\text{Det}} \begin{vmatrix} f & b\omega \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = f \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \\ B = \frac{1}{\text{Det}} \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & f \\ -b\omega & 0 \end{vmatrix} = f \frac{b\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \end{cases}$$

Cette solution peut être, comme vu précédemment, réécrite sous la forme

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A},$$

soit

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} \quad \text{et} \quad C = f \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

À l'aide de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de $\gamma = -\frac{b}{2m}$, ce résultat se réécrit

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Si l'oscillateur est amorti, c'est-à-dire si $b > 0$, la solution (dite transitoire) de l'équation sans second membre devient négligeable pour des temps assez grands vu qu'elle décroît exponentiellement alors que la solution particulière oscille à la fréquence ω .

Le phénomène remarquable, c'est que l'amplitude des oscillations dépend de la fréquence, et qu'elle devient très grande pour les systèmes peu amortis lorsque ω s'approche de sa **fréquence propre** ω_0 , c'est-à-dire la fréquence à laquelle ce système oscillerait s'il était libre, sans oscillation forcée ni amortissement. L'amplitude maximale est atteinte lorsque

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = 0 \implies 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \implies \omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2.$$

Lorsque $\gamma \rightarrow 0$, la fréquence du maximum tend vers ω_0 , et l'amplitude diverge! Ce phénomène est connu sous le nom de **résonance**, et il peut avoir des conséquences catastrophiques si, par malchance, un système est perturbé par une action extérieure qui agit à une fréquence proche de sa fréquence propre.