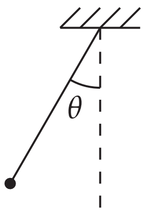
2

Cinématique, coordonnées cylindriques et sphériques

« Le temps et l'espace ne sont pas des conditions dans lesquelles nous vivons, mais des modes par lesquels nous pensons. »

— Albert Einstein

La **cinématique** a pour objet la description du mouvement indépendamment de ses causes. Dans de nombreuses situations, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus commodes. Prenons l'exemple d'un pendule plan. La position du pendule est repérée très simplement par un seul paramètre, l'angle θ avec la verticale. Par ailleurs, il y a des axes privilégiés (tangents et perpendiculaires à la trajectoire) par rapport auxquels la vitesse et l'accélération prennent des formes plus intuitives, donc plus commodes.



I. Trajectoire, vitesse et accélération

Définition (Trajectoire)**.** La courbe décrite par la position $M(t)$ au cours du temps s'appelle la trajectoire.

Si l'on a choisi une origine O pour un repère, elle correspond à l'extrémité du vecteur $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. La vitesse est définie par la dérivée de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,.$$

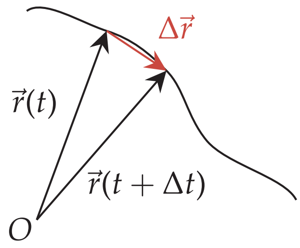
Proposition 1. La vitesse est toujours **tangente** à la trajectoire.

Justification. Repartons de la définition de la vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\,,$$

et posons

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\,.$$



Si le temps Δt est suffisamment petit, le vecteur $\Delta\vec{r}$ se confond avec une portion de trajectoire et il devient tangent à la trajectoire.

À partir de cette propriété, il est commode d'introduire un certain nombre de grandeurs annexes.

— Le **vecteur unitaire tangent** $\vec{\tau}(t)$. Il est colinéaire et de même sens que $\vec{v}(t)$, on peut donc l'écrire

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}\,.$$

— La **vitesse scalaire** $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$. (C'est la quantité affichée comme vitesse sur le compteur d'un véhicule ou sur un GPS).

— L'**abscisse curviligne**. C'est la distance parcourue le long de la trajectoire à partir d'un point de référence. Nous la noterons $s(t)$.

Proposition 2. La dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne est la vitesse scalaire :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t)\,.$$

Démonstration. On peut écrire le vecteur vitesse comme

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{s(t+\Delta t)-s(t)}\,\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}\\ &= \vec{\tau}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,,\end{aligned}$$

parce que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{s(t+\Delta t)-s(t)} = \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}\,,$$

il vient

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t)\,.$$

Intéressons-nous maintenant au vecteur $\vec{\tau}$.

Proposition 3. $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$.

Preuve. Comme $\vec{\tau}$ est unitaire,

$$\|\vec{\tau}(t)\|^2 = \vec{\tau}(t)\cdot\vec{\tau}(t) = 1\,.$$

Prenons la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\vec{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \perp \vec{\tau}\,.$$

Remarque : cette proposition est vraie pour tout vecteur de norme constante, en particulier pour tout vecteur unitaire.

Proposition 4. Si le mouvement est rectiligne, alors $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0$.

Preuve. $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire parallèle à la trajectoire. Il ne change pas au cours du temps donc $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0$.

Proposition 5. Si la trajectoire est localement tangente à un cercle de rayon R, alors

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \right\| = \frac{v(t)}{R}$$

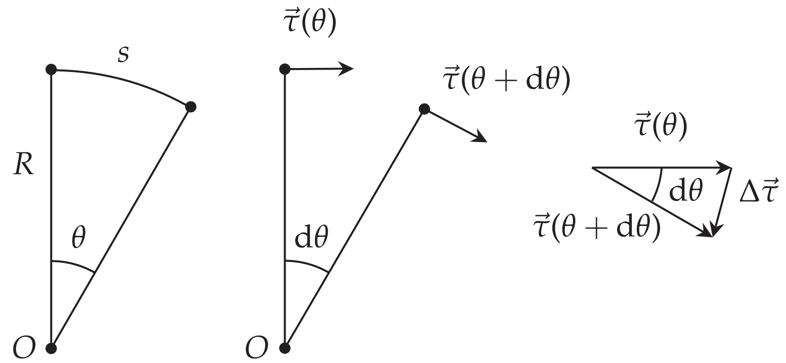
Preuve. L'abscisse curviligne est donnée par $s = R\theta$. Si $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} > 0$, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad v = R\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\,.$$

Or,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,.$$

Le vecteur $\vec{\tau}(\theta + \mathrm{d}\theta)$ fait un angle $\mathrm{d}\theta$ avec $\vec{\tau}(\theta)$. Ainsi, $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}(\theta + \mathrm{d}\theta) - \vec{\tau}(\theta)$ est un vecteur de longueur $\mathrm{d}\theta$ (pour $\mathrm{d}\theta$ petit).



On en déduit

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\theta} \right\| = \lim_{\mathrm{d}\theta \to 0} \left\| \frac{\vec{\tau}(\theta + \mathrm{d}\theta) - \vec{\tau}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right\| = 1 \Longrightarrow \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} \right\| = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\theta} \right\| = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v(t)}{R}\,.$$

Proposition 6. Le vecteur $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$ est orienté vers le centre de la trajectoire.

Preuve. Prenons l'origine O au centre du cercle. On a bien sûr $\vec{r}(t) \cdot \vec{\tau} = 0$, d'où en dérivant par rapport au temps :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}_{=\,v(t)} \cdot \vec{\tau} + \vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = -v(t) < 0\,.$$

On en déduit que $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ est orienté vers O.

Remarque. Si le mouvement est rigoureusement circulaire, ces propriétés peuvent se déduire très simplement de la forme explicite de $\vec{\tau}$. Si $\vec{e}_x$ est horizontal et $\vec{e}_z$ vertical, on a :

$$\vec{\tau} = \cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

et donc

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_z)\,.$$

Comme $\frac{d\theta}{dt} > 0$, ce vecteur pointe vers l'origine O, et sa norme est égale à $\frac{d\theta}{dt}$.

Considérons désormais l'**accélération**. Par définition,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Or,

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{\tau} + v(t)\,\frac{d\vec{\tau}}{dt}\,.$$

Le premier terme est tangent à la trajectoire, le deuxième terme est perpendiculaire à la trajectoire. L'accélération se décompose donc naturellement en une composante tangentielle $\vec{a}_\mathrm{t}$ et une composante normale $\vec{a}_\mathrm{n}$:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\mathrm{t}(t) + \vec{a}_\mathrm{n}(t)\,,$$

avec

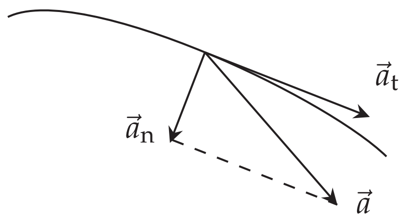
$$\vec{a}_\mathrm{t}(t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{\tau} = \dot{v}(t)\vec{\tau} = \ddot{s}(t)\vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_\mathrm{n}(t) = v(t)\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{s}(t)\,\frac{d\vec{\tau}}{dt}\,.$$

Pour une trajectoire qui est localement tangente à un cercle, $\vec{a}_\mathrm{n}(t)$ est orienté vers le centre du cercle, et

$$\|\vec{a}_\mathrm{n}(t)\| = \frac{v(t)^2}{R}\,.$$

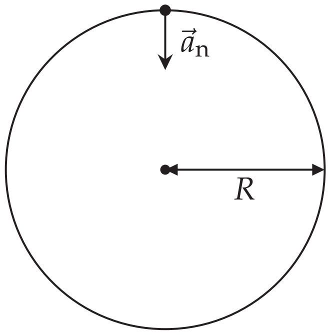
On a donc finalement

$$a_\mathrm{t} = \dot{v} = \ddot{s} \quad \text{et} \quad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}\,.$$



Cas particulier. Si la vitesse $v(t)$ est constante, l'accélération est perpendiculaire à la trajectoire. Prenons l'exemple d'une bille dans un anneau. Si elle tourne à la vitesse v, son accélération est purement normale et égale à

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R}\,.$$

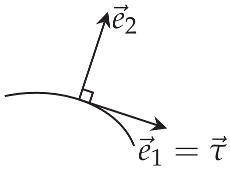


La bille est soumise à une force **centripète** (orientée vers le centre de la trajectoire) de la part de l'anneau. D'après la troisième loi, la bille exerce sur l'anneau une force **centrifuge** (orientée vers l'extérieur). L'intensité de ces forces se calcule aisément :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \left\|\vec{F}\right\| = m a_\mathrm{n} = \frac{mv^2}{R}\,.$$

II. Bases en rotation

Dans de nombreuses circonstances, il s'avère commode de travailler avec une autre base que la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Par exemple, on pourrait utiliser la base formée par le vecteur $\vec{\tau}$, un vecteur perpendiculaire à la trajectoire (si elle est localement plane), et un troisième vecteur perpendiculaire aux deux autres.



Le troisième vecteur est en général choisi comme

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\,,$$

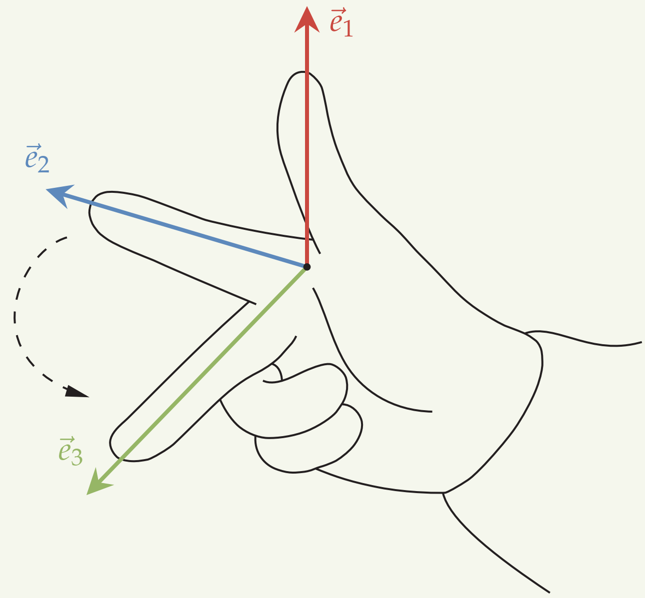
où $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Si tel est le cas, le repère est qualifié de **direct** ou **droit**. Pour rappel, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur défini par :

— $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

— sa norme est égale à $ab\,|\sin\theta|$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$;

— son orientation est définie par la règle de la main droite.

Règle de la main droite. Poing serré, pouce en l'air, si l'on tourne le poing de $\vec{e}_1$ à $\vec{e}_2$, le pouce pointe dans la direction de $\vec{e}_3$. On peut aussi le voir comme la règle du tire-bouchon (si l'on tourne de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$, il s'enfonce vers $\vec{e}_3$), ou avec trois doigts de la main droite comme ci-dessous : si le pouce correspond à $\vec{e}_1$, l'index à $\vec{e}_2$, alors le majeur donne $\vec{e}_3$.



Dans une base orthonormée directe, le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de composantes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) est donné par :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

Le produit vectoriel est très utile dans la formulation de nombreuses propriétés physiques, et nous établirons certaines de ses propriétés en cours de route. L'une des plus fondamentales est son **anti**-commutativité :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} ,$$

propriété évidente d'après sa définition, et clairement apparente d'après sa forme dans un repère orthonormé direct.

En général, les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ varient au cours du temps. Ce sera par exemple le cas si on choisit $\vec{e}_1 = \vec{\tau}$. Quelle est la nature de cette variation ? Il s'agit de façon générale d'une **rotation**, un résultat dû à Poisson.

Proposition. Si les vecteurs d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ changent au cours du temps, il existe un vecteur $\vec{\omega}(t)$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i .$$

Le mouvement est un mouvement de rotation autour de la direction du vecteur $\vec{\omega}$, de **vitesse angulaire** (ou **vitesse instantanée de rotation**) $\omega = \|\vec{\omega}\|$, et de sens trigonométrique direct quand $\vec{\omega}$ pointe vers le lecteur.

Démonstration. Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment une base, on peut développer les dérivées dans cette base :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t} = E_{11}\,\vec{e}_1 + E_{12}\,\vec{e}_2 + E_{13}\,\vec{e}_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t} = E_{21}\,\vec{e}_1 + E_{22}\,\vec{e}_2 + E_{23}\,\vec{e}_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t} = E_{31}\,\vec{e}_1 + E_{32}\,\vec{e}_2 + E_{33}\,\vec{e}_3 \end{cases} ,$$

ou encore, mis sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{e}_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_{ji} + E_{ij} = 0\,.$$

On déduit que

$$E_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad E_{ij} = -E_{ji}\,.$$

La matrice E est antisymétrique et de diagonale nulle : elle ne dépend que de trois coefficients indépendants. Écrivons-les comme

$$E_{12} = -E_{21} = \omega_3\,, \quad E_{13} = -E_{31} = -\omega_2 \quad \text{et} \quad E_{23} = -E_{32} = \omega_1\,.$$

Avec ces notations, les dérivées s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_i\,, \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + \omega_3\,\vec{e}_3\,.$$

Vérifions-le :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t} &= (\omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + \omega_3\,\vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 \\ &= \omega_1\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + \omega_3\,\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\ &= -\omega_2\,\vec{e}_3 + \omega_3\,\vec{e}_2\,. \end{aligned}$$

On vérifie aisément les deux autres cas.

Complément (Justification). Pour se convaincre que c'est un mouvement de rotation, considérons le cas où $\vec{\omega}(t)$ est indépendant du temps, et choisissons $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$. Pour tout vecteur lié au repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\,.$$

Posons $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, on a alors

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\,\vec{e}_z \wedge \left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\right) = \omega x\,\vec{e}_y - \omega y\,\vec{e}_x\,.$$

L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ conduit au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \\ \dot{z} = 0 \end{cases},$$

qui a pour solution

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\omega t) \\ y = \rho\sin(\omega t) \\ z = \text{cte} \end{cases}$$

puisque

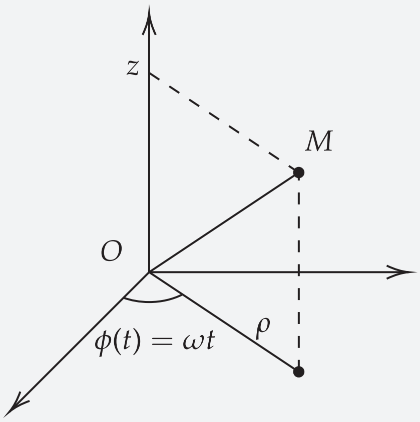
$$\frac{\mathrm{d}\cos(\omega t)}{\mathrm{d}t} = -\omega\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega\cos(\omega t).$$

Autrement dit,

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega t) \\ \rho \sin(\omega t) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi(t) \\ \rho \sin \phi(t) \\ z \end{pmatrix} , \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \omega t \,.$$

C'est un mouvement de rotation autour de l'axe z de fréquence ω. De façon générale, la fréquence est reliée à ϕ par

$$\omega = \dot{\phi} \,.$$



III. Coordonnées cylindriques

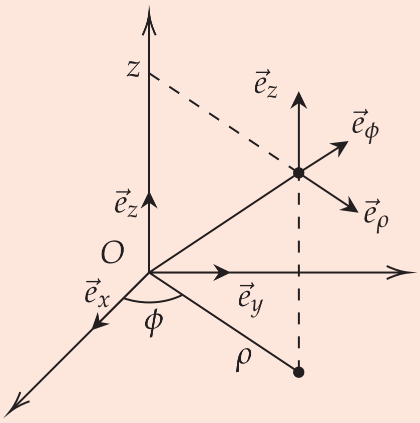
Cet exemple suggère que pour traiter certains problèmes il est plus commode de repérer la position d'un point par les nombres (ρ, ϕ, z) que par les coordonnées cartésiennes. Dans l'exemple précédent, la position est donnée par $\rho = \text{cte}$, $\phi = \omega t$, $z = \text{cte}$. Les coordonnées (ρ, ϕ, z) sont appelées **coordonnées cylindriques**.

Définition (Coordonnées cylindriques)**.** Dans le repère cartésien, la position du point M est donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos \phi \, \vec{e}_x + \rho \sin \phi \, \vec{e}_y + z \, \vec{e}_z \,.$$

Pour travailler avec ces coordonnées, il est très utile de changer de repère, et de considérer la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, où les vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_z$ sont tangents aux **lignes de coordonnées**, les lignes obtenues en ne faisant varier qu'une coordonnée. En fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \phi \, \vec{e}_x + \sin \phi \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \, \vec{e}_x + \cos \phi \, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} .$$



Proposition. Le vecteur rotation qui décrit le mouvement de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ par rapport à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\vec{e}_z}$$

Démonstration. Cette proposition est très intuitive puisque le repère tourne autour de l'axe z, et que cette rotation est contrôlée par l'angle ϕ. Pour la démontrer, on remarque que lorsque le point se déplace dans l'espace, ρ, ϕ et z dépendant du temps, les vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ et $\vec{e}_z$ dépendent eux aussi du temps :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\phi}\sin\phi\,\vec{e}_x + \dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_y\,, \\
\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\phi}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_x - \dot{\phi}\sin\phi\,\vec{e}_y\,, \\
\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Les deux premières équations peuvent se réécrire comme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\phi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\,\vec{e}_\rho\,.$$

En utilisant les relations $\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi$, qui découlent du fait que la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ est orthonormée, on en déduit aisément que le vecteur de rotation ω est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\vec{e}_z\,.$$

Dans ce repère, le vecteur position est donné simplement par

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z\,.$$

On en déduit la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t}}_{\dot{\phi}\,\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\rho = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi} + \dot{z}\,\vec{e}_z + z \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}}_{\dot{\phi}\,\vec{e}_z\wedge\vec{e}_z = \vec{0}}\,,$$

d'où finalement

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{z}\,\vec{e}_z\,.$$

De même, l'accélération est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}t} + \left(\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\,\vec{e}_\phi + \rho\dot{\phi} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\phi}{\mathrm{d}t}}_{\dot{\phi}\,\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\phi = -\dot{\phi}\,\vec{e}_\rho} + \ddot{z}\,\vec{e}_z + \dot{z}\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \left(\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\,\vec{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\,\vec{e}_\rho + \ddot{z}\,\vec{e}_z\,,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\,\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\,\vec{e}_\phi + \ddot{z}\,\vec{e}_z}\,.$$

Remarque. Toutes ces expressions ont la bonne dimension !

Exemple d'utilisation. Le pendule
Considérons un pendule contraint à osciller dans un plan vertical perpendiculaire à z (qui est ici choisi selon une direction horizontale). Sa position est entièrement repérée par l'angle ϕ avec la verticale. Cela suggère d'utiliser des coor-

données cylindriques définies par rapport à un repère cartésien où l'axe des x est suivant la verticale descendante, l'axe des y vers la droite, et l'axe des z sort du plan vers le lecteur. Comme $\rho = \ell = \text{cte}$ et $z = 0$, l'accélération est donnée par

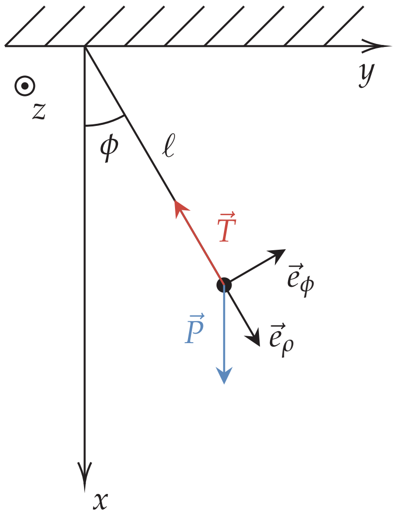
$$\vec{a} = -\ell\dot{\phi}^2\,\vec{e}_\rho + \ell\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,.$$

Le pendule est soumis à deux forces :

— son poids $\vec{P} = mg\,\vec{e}_x$;

— la tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_\rho$.

Remarque. La tension du fil est un exemple de force de liaison (voir chapitre 4). Elle est dirigée le long du fil et s'adapte au mouvement pour que la bille reste à la distance ℓ du point d'attache du fil. Son intensité n'est pas connue a priori.



Pour trouver l'équation du mouvement, vu que l'intensité de la tension n'est pas connue, le plus simple est de projeter sur $\vec{e}_\phi$ pour l'éliminer :

$$mg\,\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_\phi}_{-\sin\phi} = m\ell\ddot{\phi}$$
$$-mg\sin\phi = m\ell\ddot{\phi}$$
$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$

C'est une équation différentielle qui ne possède pas de solution simple. Nous verrons dans le prochain chapitre comment la résoudre de façon approximative dans la limite des petites oscillations.

IV. Coordonnées sphériques

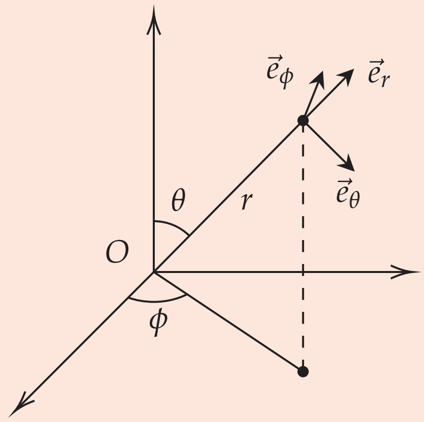
Pour de nombreux problèmes, notamment le mouvement d'un point sur une sphère, il est préférable de repérer la position d'un point par sa distance au centre du repère r et deux angles, θ et ϕ. Les coordonnées (r, θ, ϕ) sont appelées **coordonnées sphériques**.

Définition (Coordoonnées sphériques)**.** Dans le repère cartésien, la position du point M est donnée par

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + r\cos\theta\vec{e}_z\,.$$

Les vecteurs qui forment le repère naturel dans ce système de coordonnées sont donnés par

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y \end{cases} .$$



Remarque. Le vecteur $\vec{e}_\phi$ est le même en coordonnées cylindriques et sphériques. Une façon simple de visualiser les vecteurs en coordonnées sphériques est de partir des coordonnées cylindriques, et de voir $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ comme le résultat d'une rotation de $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_\rho$ d'angle θ autour de $\vec{e}_\phi$.

Proposition. Le vecteur rotation qui décrit le mouvement de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ par rapport à la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est donné par :

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\,\vec{e}_z}$$

Démonstration. Comme pour les coordonnées cylindriques, cette forme est très intuitive puisqu'elle décrit une rotation autour de $\vec{e}_\phi$ à la vitesse $\dot{\theta}$ et une rotation autour de $\vec{e}_z$ à la vitesse $\dot{\phi}$. Pour démontrer la proposition, on remarque que, si θ et ϕ dépendent du temps, les dérivées des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= \left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)\,\vec{e}_x + \left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)\,\vec{e}_y - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_z \\ &= \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi\,, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} &= \left(-\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\right)\,\vec{e}_x + \left(-\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\phi\right)\,\vec{e}_y - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_z \\ &= -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\phi\,, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\phi}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_x - \dot{\phi}\sin\phi\,\vec{e}_y \\ &= -\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta\,. \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur rotation de cette évolution temporelle est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_r - \dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_\phi\,,$$

ce qui peut se réécrire

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\,\vec{e}_z\,,$$

forme sous laquelle on voit qu'il correspond effectivement à une rotation autour de $\vec{e}_\phi$ à la vitesse $\dot{\theta}$ et une rotation autour de $\vec{e}_z$ à la vitesse $\dot{\phi}$.

Dans ce repère, le point M est simplement repéré par

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r\,,$$

d'où l'on tire pour la vitesse

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi\,,$$

et pour l'accélération

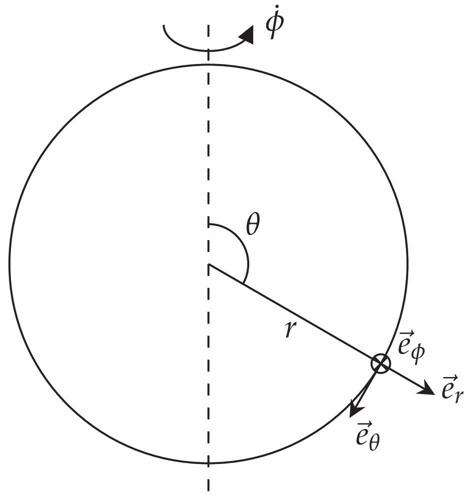
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\phi\right)\\ &\quad + \left(\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\,\vec{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\left(-\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta\right)\,,\end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\,\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\,\vec{e}_\theta\\ &\quad + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\,\vec{e}_\phi\,.\end{aligned}}$$

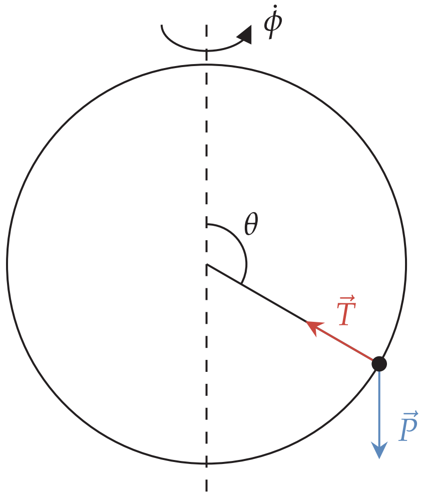
Exemple d'utilisation. Masse sur un cerceau tournant

On considère une bille astreinte à se déplacer sur un cerceau de rayon r tournant à la vitesse $\dot{\phi}$ autour d'un diamètre vertical. La position de la bille est entièrement déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Vu que l'autre degré de liberté est l'angle ϕ du cerceau autour de son diamètre, cela suggère d'utiliser des coordonnées sphériques.



On se propose de calculer l'angle θ en fonction de $\dot{\phi}$, en supposant que la bille glisse sans frottement, ce qui implique que la réaction de l'anneau est perpendiculaire à l'anneau (voir chapitre 4). Le système est donc soumis à cette réaction (force de liaison) et à son poids, dont la projection est

$$\vec{P} = mg\cos\left(\pi - \theta\right)\,\vec{e}_r + mg\sin\left(\pi - \theta\right)\,\vec{e}_\theta = -mg\cos\theta\,\vec{e}_r + mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$



Nous nous intéressons désormais seulement à la recherche des positions d'équilibre, pour lesquelles $\dot\theta = 0$; par ailleurs, $\dot r = 0$ à cause des contraintes. L'expression de l'accélération en coordonnées sphériques se réduit ainsi à

$$\vec{a} = -r\dot\phi^2 \sin^2\theta\,\vec{e}_r - r\dot\phi^2 \sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

Comme la force de liaison est perpendiculaire à l'anneau, $\vec{T}\cdot\vec{e}_\theta = 0$. L'équation du mouvement projetée sur $\vec{e}_\theta$ s'écrit donc

$$\vec{P}\cdot\vec{e}_\theta = -mr\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta\,.$$

Or,

$$\vec{P}\cdot\vec{e}_\theta = -mg\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta = mg\sin\theta$$

donc

$$mg\sin\theta = -mr\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta\,.$$

On en déduit que la position d'équilibre satisfait une des conditions suivantes

$$\sin\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\theta = \pi \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{g}{r\dot\phi^2}\,.$$

Si $\frac{g}{r\dot\phi^2} > 1$, c'est-à-dire si $\dot\phi^2 < \frac{g}{r}$, il n'y a que les solutions $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Par contre, si $\dot\phi^2 > \frac{g}{r}$, il y a une autre solution donnée par

$$\theta = \arccos\left(-\frac{g}{r\dot\phi^2}\right)\,.$$

On peut montrer que si $\dot\phi^2 < \frac{g}{r}$, la solution $\theta = \pi$ est stable et la solution $\theta = 0$ instable, alors que si $\dot\phi^2 > \frac{g}{r}$, c'est la solution $\theta = \arccos\left(-\frac{g}{r\dot\phi^2}\right)$ qui est stable, et les deux autres instables.

Remarque. Quand $\dot\phi \longrightarrow +\infty$, $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, ce qui est intuitif.

V. Coordonnées polaires

Pour les problèmes où le mouvement se situe dans un plan défini par un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on peut remplacer ce repère par le repère $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$. Les coordonnées ρ et ϕ sont appelées **coordonnées polaires**. On peut les voir comme deux des trois coordonnées cylindriques en se limitant au plan défini par $z = 0$, ou comme deux des trois coordonnées sphériques en se limitant au plan défini par $\theta = \pi/2$.

Le vecteur rotation qui décrit la rotation des vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$ est donné par $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\vec{e}_z$, ce qui correspond à la fois au vecteur rotation des coordonnées cylindriques, et au vecteur rotation des coordonnées sphériques lorsque θ est constant (et donc $\dot{\theta} = 0$).

Dans ce repère, le vecteur position est donné simplement par

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho\,,$$

la vitesse prend la forme

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,,$$

et l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\,\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\,\vec{e}_\phi\,.$$

Remarque. Comme, lorsqu'on se limite au plan défini par un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, la coordonnée ρ et le vecteur $\vec{e}_\rho$ des coordonnées cylindriques sont confondus avec la coordonnée r et le vecteur $\vec{e}_r$ des coordonnées sphériques, on utilise souvent la notation alternative selon laquelle le vecteur position est donné par

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r\,,$$

la vitesse par

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,,$$

et l'accélération est donnée par

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\,\vec{e}_r + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\,\vec{e}_\phi\,.$$

Le problème du pendule traité plus haut en coordonnées cylindriques aurait pu être traité directement en coordonnées polaires, ce qui conduit bien sûr rigoureusement aux mêmes équations puisque la coordonnée z n'intervient pas.