Sections CGC, EL, IN & MX

Physique générale

Mécanique

Notes rédigées par **Frédéric Mila**

–

Revues et corrigées en collaboration avec
Christophe Galland et **Stefano Rusponi**

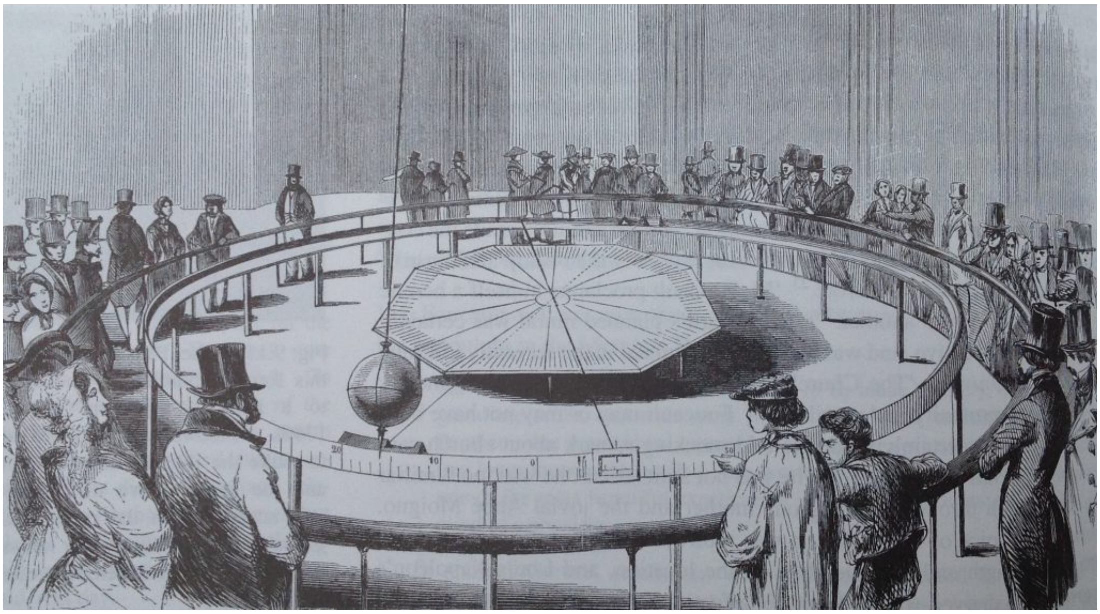


Illustration du pendule de Foucault au Panthéon à Paris

Version du 13 septembre 2024

Un grand merci à Hugo Cavet pour la première version Latex de ces notes de cours, les illustrations, et les citations en tête de chapitre...

Table des matières

Avant-propos

La mécanique est l'étude du mouvement d'objets massifs soumis à des forces. L'énoncé par Newton en 1666 des lois fondamentales de la mécanique marque à la fois le début de la physique moderne et le début des mathématiques modernes. En effet, Newton a dû développer le calcul différentiel pour formuler correctement le principe fondamental.

C'est donc très naturellement à l'occasion d'un premier cours de mécanique que l'on rencontre un certain nombre de concepts mathématiques. Ces concepts sont développés dans les cours d'algèbre et d'analyse, mais on en a tout de suite besoin. Comment faire ? Commencer par un bref cours de mathématiques ?

Dans ces notes de cours, j'ai décidé d'opter pour une autre approche. On va étudier des problèmes de plus en plus complexes, et on introduira au fur et à mesure les notions mathématiques nécessaires. Elles seront regroupées dans des appendices auxquels on pourra se référer tout au long du semestre.

Complément (*les éléments indiqués en complément ne sont pas exigés à l'examen*). Le domaine d'application de la mécanique newtonienne est vaste, mais pas infini. Il est limité aux phénomènes qui impliquent des vitesses beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière $c \simeq 300\ 000\ \mathrm{km/s}$. Lorsque l'on approche de ces vitesses, la théorie de Newton doit être modifiée : c'est la théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905). Lorsque le champ gravitationnel est très intense, la relativité générale doit être utilisée (Einstein, 1917). Par ailleurs, si l'on s'intéresse à des objets très petits (atomes, particules, ...), la théorie doit être remplacée par la mécanique quantique (Heisenberg, 1926) qui associe à chaque système une fonction d'onde dont l'évolution dans le temps, gouvernée par l'équation de Schrödinger, permet de prédire la probabilité d'obtenir un certain résultat de mesure. A noter que pour l'instant il n'existe pas de théorie quantique unifiée avec la relativité générale.

Pendant ces deux siècles et demi de règne sans partage, la mécanique a été utilisée pour comprendre des phénomènes de plus en plus complexes : la balistique (le mouvement des corps dans le champ de gravitation de la Terre), le mouvement d'objets soumis à des forces supplémentaires (ressort, pendule, ...), le mouvement des planètes autour du Soleil, le mouvement d'objets en interaction, le mouvement des corps solides, *etc*. Dans ce cours, nous allons étudier un certain nombre de ces phénomènes par complexité croissante, en partant comme il se doit des lois de Newton et de la balistique (qui concerne l'étude du mouvement des projectiles, mot issue du grec "*ballein*" : lancer, jeter).

1

Lois de Newton et balistique

> « *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.* »
>
> — Isaac Newton

I. Introduction

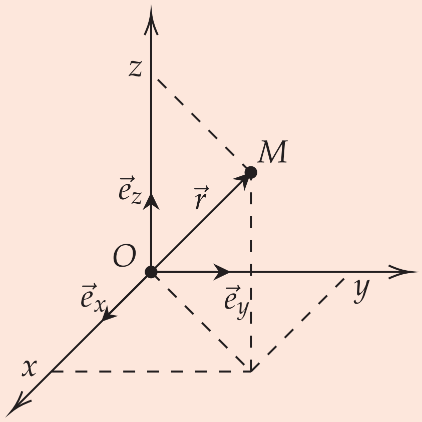
Les objets étudiés en mécanique sont caractérisés avant tout par leur masse m, mais ils ont toujours une certaine extension dans l'espace (bille, dé, ...). Dans beaucoup de circonstances, la taille et la forme précise de ces objets sont sans importance, et le mouvement peut être décrit par la position d'un point de référence, par exemple son centre pour une bille. Ceci conduit au concept de **point matériel**, un objet de masse m et d'extension nulle. Cette approximation consiste à ignorer la possibilité pour un objet de tourner sur lui-même et décrit de façon rigoureuse le déplacement du centre de masse considéré comme un point matériel de masse m. Nous y reviendrons lors de l'étude du mouvement des solides.

La position d'un point matériel est repérée par un point M dans l'espace à trois dimensions. La description de son mouvement ne fait de sens que par rapport à un certain **référentiel**.

> **Définition** (Référentiel)**.** Un référentiel est défini par un ensemble de quatre points non coplanaires dont les positions relatives ne bougent pas au cours du temps.

Une fois le référentiel choisi (par exemple un solide lui-même fixé au sol), l'espace peut-être doté d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à ce référentiel (c'est à dire fixe dans ce référentiel).

> **Définition** (Vecteur position)**.** À tout point M, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. On notera souvent ce vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.



Les coordonnées du point M dans ce repère sont définies par les composantes du vecteur $\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\,.$$

Ces composantes (x, y, z) sont obtenues en projetant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur chacun des vecteurs de base, par exemple :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x = x\,\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + y\,\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + z\,\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = x\,.$$

où l'on a utilisé la distributivité du produit scalaire sur l'addition puis l'orthonormalité de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Lorsqu'un point matériel est en interaction avec son entourage, sa position évolue au cours du temps. Cette évolution est donc naturellement décrite par une fonction $M(t)$ qui à chaque instant t associe un point de l'espace, ou de façon équivalente par un vecteur $\vec{r}(t)$. Le but de la mécanique est de calculer $\vec{r}(t)$ dans différentes circonstances. Cette fonction est parfois appelée **équation horaire**. La trajectoire du point M entre deux instant t_1 et t_2 est formée par l'ensemble des points $M(t)$ (ou des vecteurs $\vec{r}(t)$) pour $t \in [t_1, t_2]$.

II. Les lois de Newton

Pour formuler les lois de Newton, il est utile d'introduire les dérivées par rapport au temps du vecteur position.

Définition (Vecteur vitesse)**.** Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ et que les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes dans le repère choisi ($\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$), on a

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + x\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y + y\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z + z\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z\,.\end{aligned}$$

En mathématiques, il est usuel de noter la dérivée d'une fonction $f(t)$ par $f'(t)$. En mécanique (et d'autres branches de la physique), la dérivée *par rapport au temps* est notée avec un point au-dessus de la lettre désignant la fonction :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \equiv \dot{x}(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \equiv \dot{y}(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{z}(t)\,,$$

et pour un vecteur

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\vec{r}}(t)\,.$$

Ainsi, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z$.

Définition (Vecteur accélération)**.** Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, on a

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

d'où, en utilisant de nouveau que les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes dans le repère choisi,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_z\,.$$

De même que l'on note les dérivées premières avec un point, on note les dérivées secondes par rapport au temps avec deux points :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) \equiv \ddot{x}(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) \equiv \ddot{y}(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) \equiv \ddot{z}(t)\,, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)\,.$$

Ainsi, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{e}_z$.

Enfin, un point matériel n'est pas simplement caractérisé par sa position, mais également par sa masse m. La formulation de nombreuses propriétés se fait de façon plus compacte en termes du vecteur **quantité de mouvement**.

Définition (Quantité de mouvement)**.** La quantité de mouvement est le produit de la vitesse par la masse :

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\,.$$

En 1666, Newton a rationalisé de nombreuses observations à l'aide de trois lois.

Loi 1 (1re loi de Newton, Principe d'inertie)**.** Un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v} = \textbf{cte}$).

Loi 2 (2e loi de Newton, Principe fondamental de la dynamique)**.** Si, du fait de ses interactions avec l'extérieur, un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$, son mouvement est régi par l'équation

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Si sa masse est constante, cette équation prend la forme

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\,.$$

Loi 3 (3^{e} loi de Newton, Principe d'action et réaction)**.** Si un corps 1 exerce sur un corps 2 une force $\vec{F}_{1\to 2}$, le corps 2 exerce sur le corps 1 une force $\vec{F}_{2\to 1}$ qui lui est opposée :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}\,.$$

Ces lois appellent de nombreux commentaires. En réalité, une bonne partie du cours va consister à donner un sens précis à ces lois.

La première loi se base sur l'observation qu'un objet posé sur une table parfaitement horizontale ne bouge pas, et que si on lui donne une impulsion sa vitesse sera constante si les frottements sont négligeables. Elle sous-entend que si l'on prend la Terre comme référence, cette loi est valable. Or, comme nous le verrons, ce n'est pas rigoureusement vrai. Si l'on prend le Soleil comme référence, la Terre tourne autour du Soleil et sur elle-même. La première loi s'appliquera de façon plus précise dans un référentiel lié au Soleil (quoique non rigoureuse car le système solaire tourne lui-même autour du centre de notre galaxie, la voie lactée...).

Il y aura donc en général des corrections à apporter à la première loi si l'on se place dans un référentiel lié à la Terre, corrections d'autant plus grandes que le temps d'observation d'un phénomène est grand et devient comparable à la période de rotation de 23h 56min (jour sidéral). Par conséquent, la première loi de Newton peut être comprise comme la définition d'un **référentiel inertiel** ou **galiléen**, c'est-à-dire un référentiel où elle s'applique. Pour des expériences typiquement effectuées en auditoire sur des durées de quelques secondes ou minutes, le référentiel terrestre peut-être considéré comme galiléen. Nous verrons plus tard comment les autres lois sont modifiées lorsque l'on passe dans un référentiel non-inertiel (ou non-galiléen).

Dans la deuxième loi, la force $\vec{F}$ est la résultante, c'est-à-dire la somme *vectorielle*, de toutes les forces auxquelles le point matériel est soumis. Par exemple, un objet posé sur une table est soumis à son poids et à la réaction de la table. La somme des deux s'annule, et il ne bouge pas (ou continue en mouvement rectiligne uniforme s'il possède une vitesse initiale non nulle par rapport à la table). Déterminer les forces auxquelles un point matériel est soumis est une partie importante du problème à résoudre. Par ailleurs, cette loi est formulée comme une **équation différentielle**, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir des dérivées de cette fonction. C'est particulièrement clair pour un point matériel de masse m constante puisque cette loi se réécrit

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

ou encore, en posant $\vec{F} = F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z$:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}.$$

Les forces peuvent elles-mêmes dépendre de la position, de la vitesse et du temps, ce qui conduit à un système de trois équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{x} \\ F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{y} \\ F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t) = m\ddot{z} \end{cases}.$$

Une bonne partie du cours va consister à formuler ces équations différentielles, puis à les résoudre.

Notons enfin que cette loi, d'abord formulée pour calculer $\vec{r}(t)$ connaissant $\vec{F}$, peut aussi être utilisée pour calculer $\vec{F}$ connaissant $\vec{r}(t)$. Par exemple, si une bille tourne dans un rail circulaire à vitesse constante, on peut calculer son accélération et en déduire $\vec{F}$, qui contient notamment la réaction du rail sur la bille.

Enfin, la troisième loi de Newton, qui est essentielle pour démontrer la conservation de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total d'un système isolé (voir chapitre 7), est toujours valable pour la gravitation, mais pas pour les particules chargées en mouvement.

Complément (la troisième loi et l'électromagnétisme). Pour un système de particules chargées en mouvement, les forces électromagnétiques, et notamment la force de Lorentz, peuvent violer la troisième loi. Il s'en suit qu'un tel système, même isolé du reste de l'univers, peut se mettre en mouvement de translation ou de rotation 'spontanément'. En réalité, les conservations de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total sont bien satisfaites si on tient compte du rayon électromagnétique émis par le système de charges en mouvement. Ce rayonnement transporte en effet sa propre quantité de mouvement (causant la pression de radiation) et son propre moment cinétique.

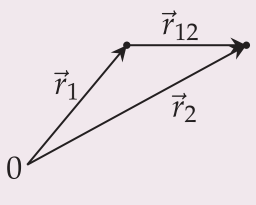
III. La balistique

La balistique est l'étude du mouvement de projectiles massifs dans le champ de pesanteur terrestre. Le champ de pesanteur est une conséquence de la **gravitation universelle**.

Loi (Gravitation). Deux objets de masse m_1 et m_2 sont attirés par une force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$\left\|\vec{F}\right\| = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,,$$

où $G = 6,674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ est la constante de gravitation universelle. Si l'on pose $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, de telle sorte que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$, la force exercée par m_2 sur m_1 est



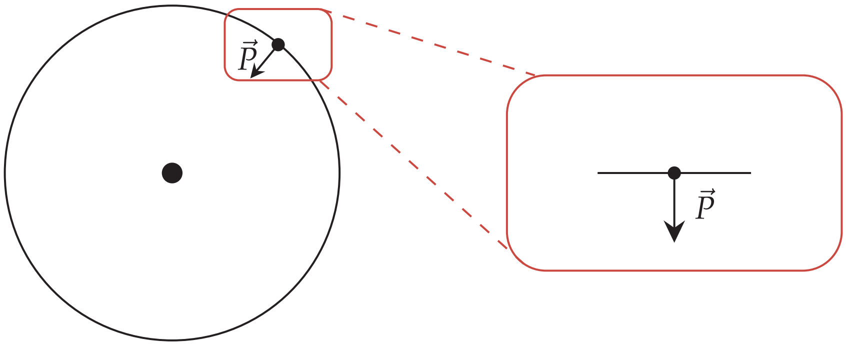
$$\vec{F}_{2\to1} = G\,\frac{m_1 m_2}{\vec{r}_{12}^{\,2}}\,\frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}\,,$$

et, d'après le principe d'action et réaction,

$$\vec{F}_{1\to2} = -G\,\frac{m_1 m_2}{\vec{r}_{12}^{\,2}}\,\frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}\,.$$

À la surface de la Terre, on peut considérer que $r_{12} \simeq R$, le rayon de la Terre. Par ailleurs, pour tous les problèmes qui font intervenir de petites distances par rapport au rayon de la Terre, on peut se placer dans le plan tangent et remplacer cette force, qui va vers le centre de la Terre, par une force verticale.[1]

1. Pour obtenir le champ de pesanteur exact, il faut aussi prendre en compte une contribution additionnelle due à la force centrifuge qui sera traitée au chapitre 6, de sorte que la verticale ne passe en générale pas par le centre de masse de la Terre, sauf aux pôles et le long de l'équateur.



La norme de la force exercée par la Terre sur un objet de masse m vaut

$$\left\|\vec{F}\right\| = \frac{GM}{R^2}\, m\,.$$

On l'écrit en général en introduisant $g = \dfrac{GM}{R^2}$ sous la forme :

$$\vec{P} = m\,\vec{g}\,,$$

où $\vec{g}$ est un vecteur vertical de norme g et où la force, appelée **poids**, est notée $\vec{P}$. g a la dimension d'une accélération et elle vaut $g \simeq 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ (parfois approximé par $10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ pour des calculs d'ordre de grandeur).

Si l'on choisit un système de coordonnées où $\vec{e}_z$ est vertical ascendant, le poids est donc donné par

$$\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z\,.$$

Si un point matériel n'est soumis qu'à l'action du poids, les équations différentielles qui régissent son mouvement sont donc

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}\,.$$

La solution générale de l'équation $\ddot{x} = 0$ est $x(t) = at + b$ avec a et b des constantes.

Vérification. $x(t) = at + b \quad\Longrightarrow\quad \dot{x}(t) = a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x}(t) = 0\,.$

Preuve. De façon générale, la solution d'une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t)$$

est donnée par $x(t) = F(t) + a$, où $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, c'est-à-dire une fonction qui satisfait $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = f$. Appliquons cette règle deux fois de suite.

1. $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 + a$ car $F(t) = 0$ est une primitive de $f(t) = 0$.
2. $\dot{x} = a \Rightarrow x(t) = at + b$ car $F(t) = at$ est une primitive de $f(t) = a$.

De même, la solution générale de l'équation $\ddot{z} = -g$ est $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + at + b$.

Vérification. $z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + at + b \quad\Longrightarrow\quad \dot{z}(t) = -gt + a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{z} = -g\,.$

Preuve.

1. $\ddot{z}(t) = -g \Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + a$ car $F(t) = -gt$ est une primitive de $f(t) = -g$.

2. $\dot{z}(t) = -gt + a \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ car $F(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at$ est une primitive de $f(t) = -gt + a$.

Finalement, la solution générale du problème fait intervenir six constantes d'intégration, deux par composantes. On peut les repérer par des indices et écrire

$$\begin{cases} x(t) = a_x t + b_x \\ y(t) = a_y t + b_y \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a_z t + b_z \end{cases} .$$

Ces constantes d'intégration sont fixées par les conditions initiales, c'est-à-dire par la position et la vitesse du point matériel. Dénotons les par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Par définition, $x(t = 0) = x_0$. Mais $x(t = 0) = a_x \times 0 + b_x = b_x$ donc $b_x = x_0$. De même, $\dot{x}(t = 0) = v_{0x}$. Mais $\dot{x}(t = 0) = a_x$ donc $a_x = v_{0x}$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = v_{0x}t + x_0 \,.}$$

De même,

$$\boxed{y(t) = v_{0y}t + y_0 \,.}$$

Enfin, $z(t = 0) = b_z$ et $\dot{z}(t = 0) = -g \times 0 + a_z = a_z$, d'où

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \,.}$$

Ces équations sont la solution générale du problème d'un point matériel dans le champ de pesanteur sans frottement ni autres forces.

Remarque. La solution est indépendante de la masse ! Un objet léger et un objet lourd tombent à la même vitesse. C'est vrai tant que l'on peut négliger les frottements, donc en particulier dans le vide.

Exemples d'utilisation.

1. **Chute d'un objet** : si on lâche un objet sans vitesse initiale d'une hauteur h, son mouvement est donné par

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \,.$$

Il touche le sol au bout d'un temps donné par

$$\begin{aligned} z(t) = 0 &\Longrightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + h = 0 \\ &\Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \,. \end{aligned}$$

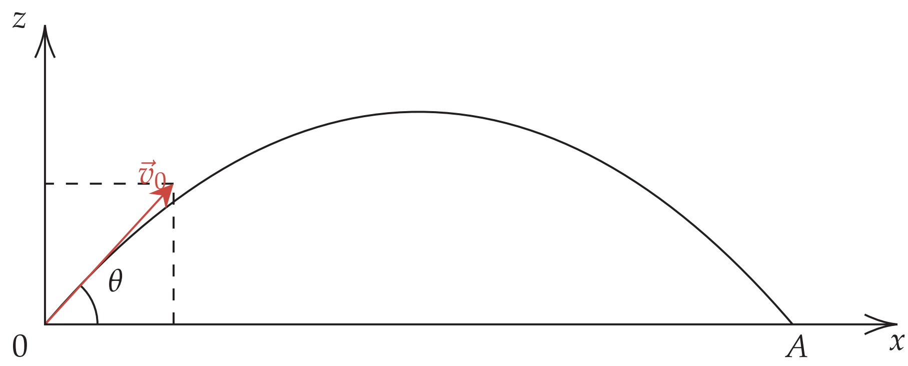
Réciproquement, si l'on mesure le temps t, on en déduit la hauteur

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \,.$$

Application : une falaise surplombe une rivière. On lâche un caillou qui met deux secondes à toucher l'eau. Quelle est la hauteur de cette falaise ?
Réponse : $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 4 = 19{,}6$ m.

2. **Trajectoire d'un projectile** : on lance un projectile depuis l'origine avec une vitesse dans le plan (xz) donnée par

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta\,, \quad v_{0z} = v_0 \sin\theta\,.$$



On se propose de déterminer :

a) la forme de la trajectoire ;
b) le temps de vol ;
c) le point d'impact A ;
d) la hauteur maximale ;
e) l'angle θ qui maximise la portée.

Solution : les équations horaires sont

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = v_0\cos\theta\ t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\ t \end{cases}.$$

a) De la première équation, on tire

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}\,.$$

De la troisième, on tire

$$z = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{1}{v_0^2\cos^2\theta}\,x^2 + \frac{v_0\sin\theta}{v_0\cos\theta}\,x\,,$$

soit

$$z = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}\,x^2 + \tan\theta\,x\,.$$

C'est l'équation d'une **parabole**. Le mouvement a lieu dans le plan (xz) puisque $y(t) = 0$.

b) Le temps de vol correspond au temps $t > 0$ tel que $z(t) = 0$, soit :

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\ t = 0$$
$$v_0\sin\theta\ t = \frac{1}{2}gt^2$$
$$t_{\text{vol}} = \frac{2v_0\sin\theta}{g}\,.$$

c) Le point A est atteint lorsque t est égal au temps de vol, d'où :

$$x(t) = v_0\cos\theta\ t = v_0\cos\theta\,\frac{2v_0\sin\theta}{g}\,,$$

soit donc finalement

$$x_A = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g}, \quad \text{et bien sûr} \quad z_A = 0 .$$

On peut aussi déterminer directement x_A en résolvant l'équation de la trajectoire pour $z = 0$, soit :

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \, x ,$$

ce qui conduit bien sûr au même résultat.

d) La hauteur maximale peut être calculée comme le maximum de $z(x)$. Ce maximum satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 &\Longrightarrow -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta = 0 \\ &\Longrightarrow x = v_0^2 \cos^2\theta \tan\theta \frac{1}{g} = v_0^2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{g} . \end{aligned}$$

C'est le milieu de la trajectoire. z vaut alors

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \frac{v_0^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{g^2} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} v_0^2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{g} ,$$

soit

$$\boxed{z_{\max} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2\theta}{g} .}$$

On peut aussi le trouver en écrivant que c'est le temps t où la vitesse verticale s'annule :

$$\dot{z}(t) = 0 \Longrightarrow -gt + v_0 \sin\theta = 0 \Longrightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} ,$$

qui nous donne le même résultat :

$$z_{\max} = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2\theta}{g} .$$

Vérification : z [m], v_0 [m s^{-1}], g [m s^{-2}].

e) Nous avons vu que la portée est donnée par

$$x_A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta .$$

Dérivons par rapport à l'angle :

$$\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Longrightarrow \frac{v_0^2}{g} 2\cos 2\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4} .}$$

La portée est maximale pour $\theta = 45°$.

IV. Balistique avec frottement

La trajectoire d'un objet de taille non négligeable peut encore être déterminée en le considérant comme un point matériel, mais à condition de prendre en compte la résistance de l'air. Cette résistance crée une force effective opposée au mouvement, et qui doit augmenter avec la vitesse et s'annuler lorsque la vitesse est nulle. Un modèle simple conduit à inclure dans le problème une force supplémentaire $\vec{F}_\mathrm{r} = -b\,\vec{v}$, proportionnelle à la vitesse (force de frottement fluide en régime laminaire).

La deuxième loi de Newton reste valable, mais à condition de prendre pour la force $\vec{F}$ la **résultante** du poids et de la force de résistance, c'est-à-dire

$$\vec{F} = \vec{P} - b\,\vec{v} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} F_x = -bv_x = -b\dot{x} \\ F_y = -bv_y = -b\dot{y} \\ F_z = -mg - b\dot{z} \end{cases} .$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = -b\dot{x} \\ m\,\ddot{y} = -b\dot{y} \\ m\,\ddot{z} = -b\dot{z} - m\,g \end{cases}$$

Commençons par résoudre la première équation :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\frac{b}{m}\,.$$

Mais on sait que la dérivée du logarithme d'une fonction u est donnée par

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}\,.$$

Ainsi, $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\ln \dot{x}]$ puisque $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$. L'équation différentielle est donc de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\ln \dot{x}] = -\frac{b}{m}\,,$$

donc

$$\ln \dot{x} = -\frac{b}{m}\,t + a\,,$$

avec a une constante, puisque $F(t) = -\dfrac{b}{m}\,t$ est une primitive de $f(t) = -\dfrac{b}{m}$. En prenant l'exponentielle des deux membres, il vient

$$\exp\left(\ln \dot{x}\right) = \exp\left(-\frac{b}{m}\,t\right)\exp(a) \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \mathrm{e}^{a}\exp\left(-\frac{b}{m}\,t\right)\,.$$

ou encore

$$\dot{x} = d\exp\left(-\frac{b}{m}\,t\right)\,,$$

où d est une constante. Si on appelle v_{0x} la vitesse initiale à l'instant $t = 0$, on a :

$$d\exp\left(-\frac{b}{m}\times 0\right) = v_{0x} \quad \Longrightarrow \quad v_{0x} = d\,.$$

Ainsi,

$$\dot{x} = v_{0x}\exp\left(-\frac{b}{m}\,t\right)\,,$$

ou encore, en introduisant la notation

$$\tau = \frac{m}{b}\,,$$

où τ est une constante ayant la dimension d'un temps,

$$\boxed{\dot{x} = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,.}$$

La vitesse dans la direction de x est réduite exponentiellement au cours du temps avec un temps caractéristique $\tau = \dfrac{m}{b}$.

Pour trouver $x(t)$, il suffit de trouver une primitive du membre de droite. Or, comme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(at\right)\right] = a \exp\left(at\right)$, une primitive de $v_{0x} \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ est donnée par $F(t) = v_{0x}\left(-\tau\right) \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$, donc

$$x(t) = -\tau v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c\,,$$

avec c une constante. Si à l'instant $t = 0$, le point est en $x = 0$, la constante c est donnée par

$$0 = -\tau v_{0x} + c \quad \Longrightarrow \quad c = \tau v_{0x}\,.$$

On en déduit que

$$\boxed{x(t) = v_{0x}\tau\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\,.}$$

De même,

$$y(t) = v_{0y}\tau\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\,.$$

Et si l'objet est lancé avec une vitesse initiale dans le plan (xz), $v_{0y} = 0$ et $y(t) = 0$: le mouvement a lieu dans le plan (xz).

Passons à l'équation différentielle en z. Elle est donnée par

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg\,,$$

ou encore

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = -mg\,.$$

Résolution par changement de variable.

On peut faire un changement de fonction inconnue pour faire disparaître le second membre. Posons en effet

$$u(t) = z(t) + at \quad \Longrightarrow \quad \dot{u} = \dot{z} + a \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{z}\,.$$

L'équation se réécrit

$$m\ddot{u} + b\dot{u} - ba = -mg\,.$$

Si on choisit $a = \dfrac{mg}{b} = \tau g$, u satisfait l'équation différentielle :

$$m\ddot{u} + b\dot{u} = 0\,.$$

C'est de nouveau la même équation différentielle que pour x, et la solution générale est
$$\dot{u}(t) = d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad u(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c\,,$$
donc
$$\begin{aligned} z(t) &= u(t) - at \\ &= -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t\,. \end{aligned}$$

Complément (Méthode alternative). Vous verrez en mathématiques que la solution générale d'une équation différentielle non homogène (avec second membre) est la somme de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

> **Vérification.** Si
> $$m\ddot{f} + b\dot{f} = 0$$
> et
> $$m\ddot{g} + b\dot{g} = -mg\,,$$
> alors
> $$m(\ddot{f} + \ddot{g}) + b(\dot{f} + \dot{g}) = -mg\,.$$
> Mais $\ddot{f} + \ddot{g}$ est la dérivée seconde de $f + g$, et $\dot{f} + \dot{g}$ est la dérivée première de $f + g$. Autrement dit, $f + g$ est solution de l'équation avec second membre. Si on additionne la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière de l'équation avec second membre, on obtient la solution générale de l'équation avec second membre.

L'équation sans second membre s'écrit
$$m\ddot{z} + b\dot{z} = 0\,.$$
C'est la même équation que pour x, et la solution générale est donnée par
$$\dot{z} = \mathrm{e}^{a} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,,$$
avec a une constante, ou encore
$$\dot{z} = d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,,$$
où d est toujours une constante. Une primitive du membre de droite est donnée par $F(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et la solution générale est de la forme
$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c\,,$$
où c et d sont des constantes. L'équation avec second membre admet une solution particulière très simple :
$$\dot{z} = -\frac{m}{b}g \quad \Longrightarrow \quad z(t) = -\frac{m}{b}gt = -g\tau t\,.$$
La solution générale est donc de la forme
$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t\,.$$

Les constantes d'intégration c et d peuvent être fixées par les conditions initiales.

1. $z(t=0) = z_0 \Longrightarrow -\tau d + c = z_0$.

2. $\dot{z}(t=0) = v_{0z} = d - g\tau$:

$$\begin{cases} d = v_{0z} + g\tau \\ c = z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 \end{cases} .$$

Finalement,

$$z(t) = z_0 - \left(v_{0z}\tau + g\tau^2\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t$$

ou encore

$$\boxed{z(t) = z_0 + \left(v_{0z}\tau + g\tau^2\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - g\tau t\,.}$$

Remarques.

— Le mouvement dépend de m dans ce cas via $\tau = \dfrac{m}{b}$.

— La vitesse verticale est donnée par

$$\dot{z}(t) = \left(v_{0z}z + g\tau\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau.$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, elle n'augmente pas indéfiniment, mais elle sature à la valeur $-g\tau$.

Complément (limite sans frottement). Dans la limite sans frottement, $\tau \longrightarrow +\infty$ et $\dfrac{t}{\tau} \longrightarrow 0$. On peut faire un développement limité de l'exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2} + \dots,$$

et on arrive à

$$\begin{aligned} z(t) &\simeq z_0 + \left(v_{0z}\tau + g\tau^2\right)\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2} + \dots\right) - g\tau t \\ &= z_0 + v_{0z}t - \underbrace{v_{0z}\frac{t^2}{\tau}}_{0 \text{ quand } \tau \longrightarrow +\infty} + \cancel{g\tau t} - \frac{1}{2}gt^2 - \cancel{g\tau t} \\ &= z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

C'est bien la solution du cas sans frottement.

Complément (trajectoire avec frottements). Lorsque $t \longrightarrow +\infty$,

$$x(t) = v_{0x}\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \longrightarrow v_{0x}\tau$$

et

$$z(t) \simeq z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t \longrightarrow -\infty\,.$$

La trajectoire doit donc avoir une asymptote verticale en $x = v_{0x}\tau$.

On peut trouver la forme explicite de la trajectoire. En effet,

$$x(t) = v_{0x}\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

peut s'inverser pour trouver t en fonction de x :

$$x = v_{0x}\tau - v_{0x}\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}$$
$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right) .$$

En injectant dans $z(t)$, on obtient

$$z(t) = z_0 + \left(v_{0z}\tau + g\tau^2\right) \underbrace{\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}_{\frac{x(t)}{v_{0x}\tau}} - g\tau t ,$$

soit donc finalement

$$\boxed{z(x) = z_0 + \frac{v_{0z} + g\tau}{v_{0x}} x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right) .}$$