

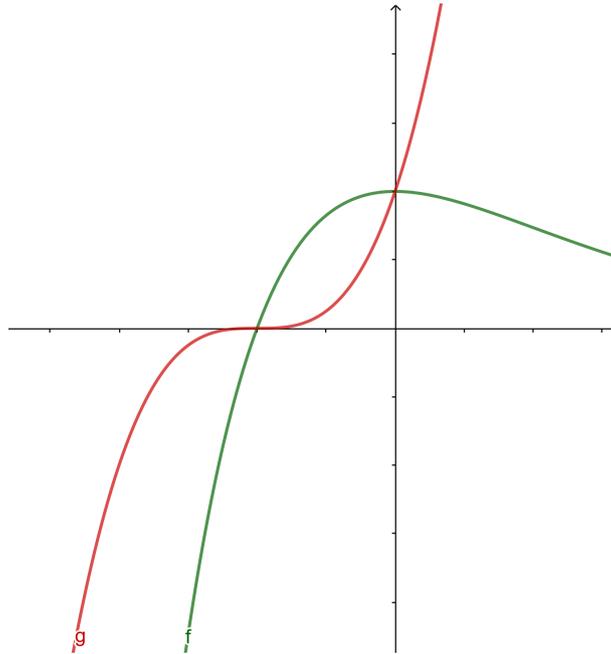
Test blanc, module Intégration

Exercice 1 (8 points)

On considère les graphes des fonctions f et g données par

$$f(x) = e^{-x}(1+x) \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)^3$$

dont on a représenté une partie ci-dessous :



- Déterminer une primitive F de la fonction f ainsi qu'une primitive G de g .
- Calculer l'aire géométrique du domaine fermé et borné déterminé par les graphes de f et g .

Exercice 2 (8 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_3^6 \frac{x+7}{x^2-x-2} dx$

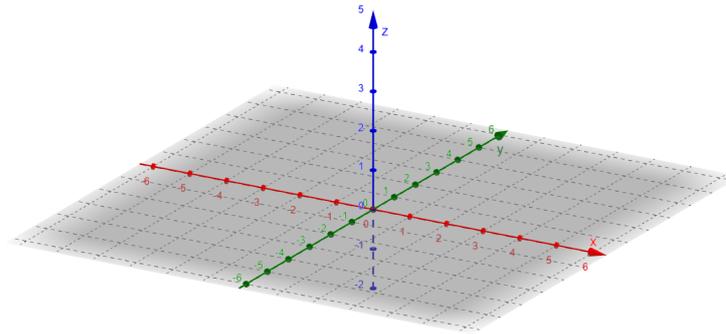
Exercice 3 (10 points)

On considère le solide ayant pour base la région fermée de Oxy délimitée par les courbes d'équation

$$y = 4 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 2 - x.$$

Les sections transversales, perpendiculaires à l'axe Ox , sont des triangles équilatéraux dont la base est située dans le plan Oxy .

- a) Esquisser le solide \mathcal{S} dans le système d'axe $Oxyz$ ci-dessous.



- b) Calculer le volume de ce solide en définissant une intégrale appropriée grâce aux sommes de Riemann et justifier son existence.

Exercice 4 (10 points)

Démontrer qu'une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est intégrable par les sommes de Darboux si et seulement si elle est intégrable par les sommes de Riemann.

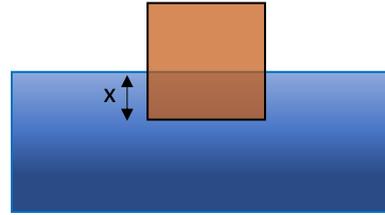
Exercice 5 (4 points)

Calculer le volume d'un ellipsoïde obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox la demi-ellipse d'équation $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

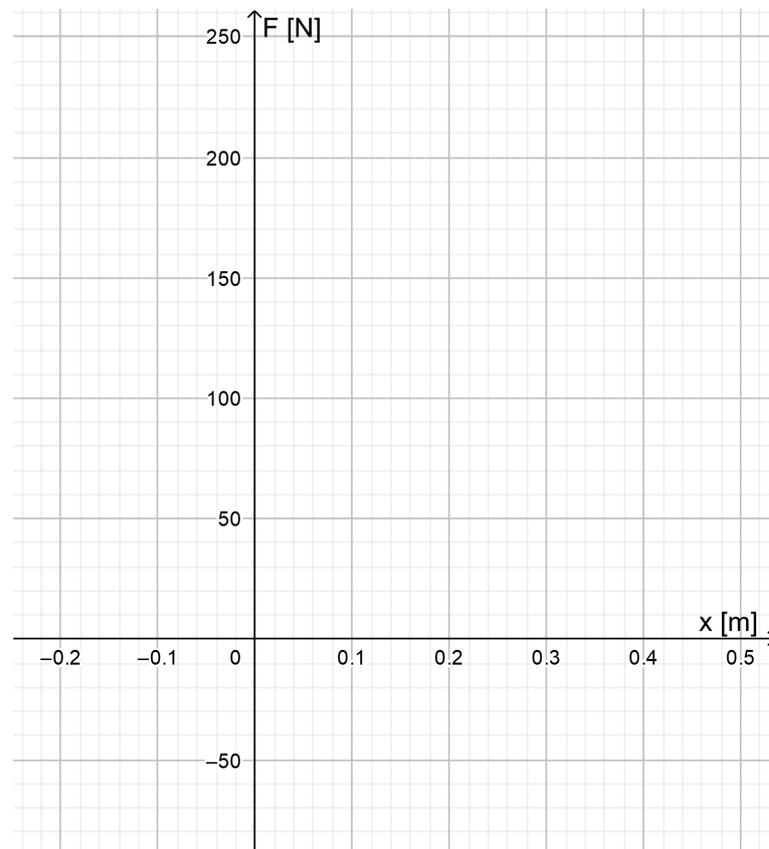
Exercice 6 (10 points)

On considère un cube en bois de poids $F = 200\text{N}$ dont les arêtes mesurent $0,3\text{ m}$ de long. Lorsque le cube est plongé dans de l'eau, il subit une poussée verticale ascendante équivalente au poids du liquide déplacé (principe d'Archimède).

On immerge le cube de sorte que ses arêtes soient parallèles resp. orthogonales à la surface de l'eau. Le poids d'un m^3 d'eau est de 9810N .



- a) Déterminer la force $F(x)$ qui s'exerce verticalement sur le cube s'il est immergé à une profondeur de x (exprimé en mètres). Tracer le graphe de la fonction $F(x)$ pour $-0,1 \leq x \leq 0,4$.



- b) A quelle profondeur x le cube se trouve-t-il lorsqu'il flotte sur l'eau ?
c) Quelle force faut-il exercer sur le cube afin de le maintenir complètement immergé ?
d) Quel est le travail fourni pour sortir complètement de l'eau le cube qui flotte à la surface ?