Calcul de la longueur d'une courbe donnée sous forme paramétrique

On considère une courbe donnée par

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \quad \text{pour } t \in [\alpha, \beta] \qquad (*)$$

On suppose que φ_1 et φ_2 sont continues et continûment dérivables et que $\varphi_1'(t) \neq 0$ sur $[\alpha, \beta]$.

On a

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\, dt}$$

<u>Preuve :</u> $(*)$ détermine une fonction $y = f(x)$ continue avec $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}$

Si $x = \varphi_1(t)$, alors $dx = \varphi_1'(t)\,dt$ et

$$L = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_1(\beta)} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)^2}\, \varphi_1'(t)\, dt$$

par substitution